Índice

Lección 9. Cointegración

Marcos Bujosa

21 de octubre de 2025

En esta lección se discutirá la posible relación entre correlación y causalidad. Veremos casos de correlación espuria (correlación sin causalidad) y una introducción a la cointegración (con un caso en el la correlación no desaparece al diferenciar las series).

- (slides) — (html) — (pdf) — (mybinder)

Carga de algunos módulos de python y creación de directorios auxiliares

```
# Para trabajar con los datos y dibujarlos necesitamos cargar algunos módulos de python
import numpy as np # linear algebra
import pandas as pd # data processing, CSV file I/O (e.g. pd.read_csv)
import matplotlib as mpl
# definimos parámetros para mejorar los gráficos
mpl.rc('text', usetex=False)
import matplotlib.pyplot as plt   # data visualization
```

- Creación del directorio auxiliar para albergar las figuras de la lección Para publicar la lección como pdf o página web, necesito los gráficos como ficheros `.png` alojados algún directorio específico:

```
imagenes_leccion = "./img/lecc09" # directorio para las imágenes de la lección
import os
os.makedirs(imagenes_leccion, exist_ok=True) # crea el directorio si no existe
```

1. Correlación

La correlación entre dos muestras de tamaño N (dos vectores de datos de $\mathbb{R}^N$) es el **coseno** del ángulo formado los vectores de dichos datos en desviaciones respecto a sus correspondientes medias.

$$\rho_{\boldsymbol{xy}} = \frac{\sigma_{\boldsymbol{xy}}}{\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{y}}}$$

Por tanto la correlación es algún valor entre -1 y 1.

- Si la correlación es 1 entonces $\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}$ es $a(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})$ para algún a positivo
- Si la correlación es -1 entonces $\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}$ es $a(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})$ para algún a negativo
- Cuando la correlación es 0 el vector $\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}$

1.1. La causalidad y correlación

Cuando existe relación causal entre variables sus muestras suelen estar correladas.

- Número de horas diurnas correlaciona positivamente con las temperaturas medias diarias.
- La altitud (o latitud) de una localidad correlaciona negativamente con la temperatura media anual.

Pero **correlaciones significativas no indican la existencia de relaciones causales**.

- En una playa: consumo de helados y ataques de tiburón a los bañistas

1.2. Correlación espuria

La correlación entre variables sin relación causal se denomina *correlación espuria*.

- Que haya correlación espuria *NO significa que realmente no hay correlación*.
- Que haya correlación espuria significa que *es erróneo interpretar* que la correlación es producto de *una relación causal*.

Puede ser que una causa común induzca la correlación entre ambas variables

- consumo de helados y venta de bañadores

Puede ser que no exista causa alguna y aún así haya correlación

- Un ejemplo
- Otro
- Otro más
- Más ejemplos aquí

1.3. Las series con tendencia suelen presentar elevadas correlaciones.

1.3.1. Ejemplo de correlación espuria: PNB vs incidencia de melanoma

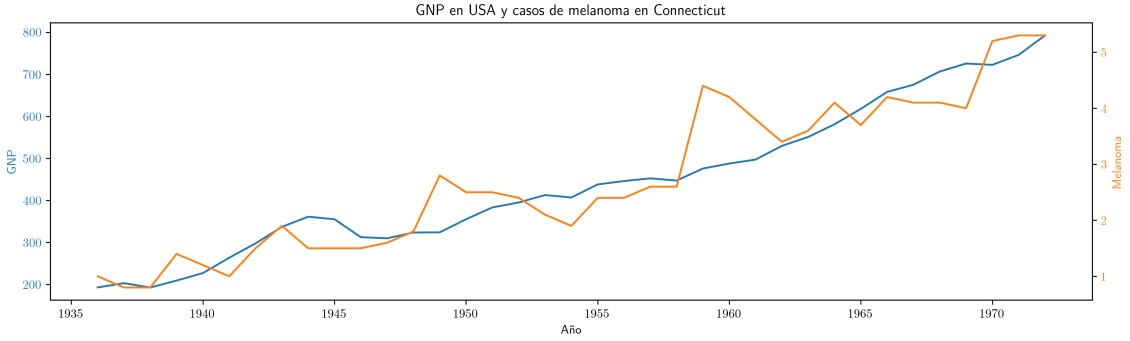
```
path = '../datos/'
df1 = pd.read_csv(path+'GNPvsMelanoma.csv')
print(df1.head(3))
```

```
    obs    GNP  Melanoma
0  1936  193.0       1.0
1  1937  203.2       0.8
2  1938  192.9       0.8
```

```
# Crear figuras y ejes con proporción 15:4
fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(15, 4))
# Representar GNP
ax1.set_xlabel('Año')
ax1.set_ylabel('GNP', color='tab:blue')
ax1.plot(df1['obs'], df1['GNP'], color='tab:blue')
ax1.tick_params(axis='y', labelcolor='tab:blue')
```

```python
# Crear un segundo eje para Melanoma
ax2 = ax1.twinx()
ax2.set_ylabel('Melanoma', color='tab:orange')
ax2.plot(df1['obs'], df1['Melanoma'], color='tab:orange')
ax2.tick_params(axis='y', labelcolor='tab:orange')
# Añadir título
plt.title('GNP en USA y casos de melanoma en Connecticut')
plt.savefig('./img/lecc09/GNPvsMelanoma.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.close()  # Cierra la figura para liberar memoria
```

Serie anual (1936–1972) del PNB anual de EEUU en miles de millones de dólares corrientes e incidencia de melanoma en la población masculina de Connecticut.

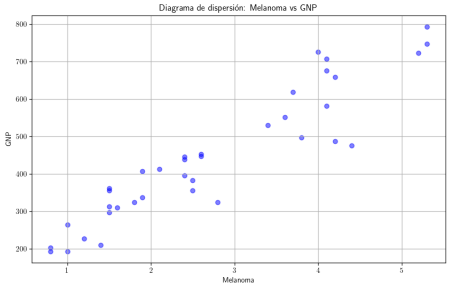



```python
# Crear el diagrama de dispersión
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(df1['Melanoma'], df1['GNP'], color='blue', alpha=0.5)
plt.title('Diagrama de dispersión: Melanoma vs GNP')
plt.xlabel('Melanoma')
plt.ylabel('GNP')
plt.grid(True)
# Guardar la figura
plt.savefig('./img/lecc09/Scatter-GNPvsMelanoma.png')
plt.close()  # Cierra la figura para liberar memoria
```

```python
correlation = df1['GNP'].corr(df1['Melanoma'])
print(f'Coeficiente de correlación: {correlation:.3f}')
```

Como ambas series presentan una tendencia creciente, **la correlación es muy elevada:**

- Valor del coeficiente de correlación: `np.float64(0.932)`



La regresión del PNB sobre los casos de melanoma arroja un excelente ajuste (*coef. de determi-*

nación muy elevdo) y los coeficientes son muy significativos tanto individual como conjuntamente.

Dep. Variable:	GNP	**R-squared:**	0.869
Model:	OLS	**Adj. R-squared:**	0.865
No. Observations:	37	**F-statistic:**	231.8
Covariance Type:	nonrobust	**Prob (F-statistic):**	5.22e-17

	coef	**std err**	**t**	**P> |t|**	**[0.025**	**0.975]**
const	118.5659	23.729	4.997	0.000	70.394	166.738
Melanoma	118.9808	7.814	15.226	0.000	103.117	134.844

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

Pero esto no significa que el modelo sea bueno o tenga alguna capacidad explicativa o predictiva (*los casos de melanoma en Connecticut no aumentan la producción de EEUU*).

1.3.2. Explorando si la correlación es probablemente *espuria* (no causalidad)

Si fuera cierto que

$$\boldsymbol{y} = \beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u};$$

entonces también sería cierto que

$$\nabla \boldsymbol{y} = \beta_2 \nabla \boldsymbol{x} + \nabla \boldsymbol{u}.$$

Añadamos al dataframe la primera diferencia de cada una de las series temporales:

```
# creamos nuevas columnas con las primeras diferencias
df1['GNP_diff'] = df1['GNP'].diff()
df1['Melanoma_diff'] = df1['Melanoma'].diff()
print(df1.head(3))
```

```
    obs    GNP  Melanoma  GNP_diff  Melanoma_diff
0  1936  193.0       1.0       NaN            NaN
1  1937  203.2       0.8      10.2           -0.2
2  1938  192.9       0.8     -10.3            0.0
```

Y generemos el gráfico de las series diferenciadas:

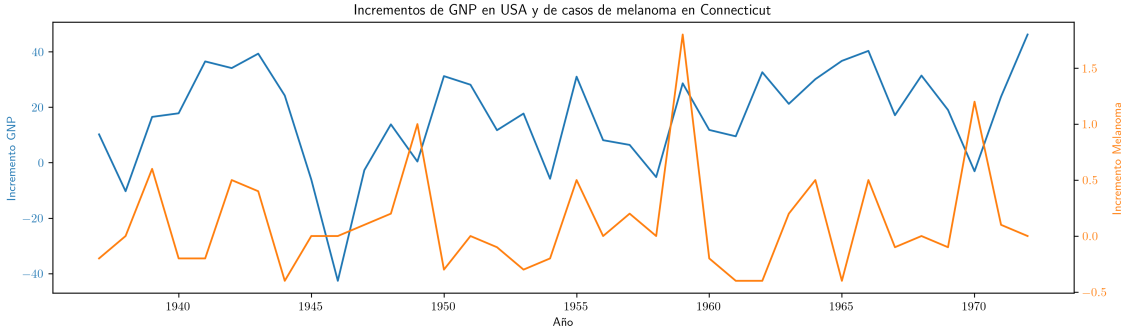
```
# Crear figuras y ejes con proporción 15:4
fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(15, 4))

# Plotear GNP
ax1.set_xlabel('Año')
ax1.set_ylabel('Incremento GNP', color='tab:blue')
ax1.plot(df1['obs'], df1['GNP_diff'], color='tab:blue')
ax1.tick_params(axis='y', labelcolor='tab:blue')

# Crear un segundo eje para Melanoma
ax2 = ax1.twinx()
ax2.set_ylabel('Incremento Melanoma', color='tab:orange')
ax2.plot(df1['obs'], df1['Melanoma_diff'], color='tab:orange')
ax2.tick_params(axis='y', labelcolor='tab:orange')

# Añadir título
plt.title('Incrementos de GNP en USA y de casos de melanoma en Connecticut')
```

```
plt.savefig('./img/lecc09/d_GNPvsd_Melanoma.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.close()  # Cierra la figura para liberar memoria
```



La aparente relación ya no se aprecia tras diferenciar las series.

Además, al realizar la regresión de la primera diferencia de `GNP` sobre la primera diferencia de `Melanoma`, obtenemos un ajuste pésimo (tan solo la constante es significativa… cuando debería ser la única no significativa).

Dep. Variable:	GNP_diff	**R-squared:**	0.000
Model:	OLS	**Adj. R-squared:**	-0.029
No. Observations:	36	**F-statistic:**	0.01150
Covariance Type:	nonrobust	**Prob (F-statistic):**	0.915

	coef	**std err**	**t**	**P> |t|**	**[0.025**	**0.975]**
const	16.5684	3.179	5.211	0.000	10.107	23.030
Melanoma_diff	0.7063	6.586	0.107	0.915	-12.678	14.090

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

Todo confirma que la relación es (evidentemente) espuria

2. Cointegración

- Un proceso estocástico $\boldsymbol{X}$ sin componentes deterministas es $I(0)$ si tiene representación ARMA estacionaria e invertible.
- $\boldsymbol{X}$ *es integrado de orden* d si $\nabla^d * \boldsymbol{X}$ es $I(0)$; entonces se dice que es $I(d)$.

En ocasiones una combinación lineal, de series con el mismo orden de integración $I(d)$, resulta ser integrada con un orden menor a d; entonces se dice que están *cointegradas*:

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ *están cointegradas* si son $I(d)$ y existen a, b, c tales que

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z} \quad \text{es cointegrada de orden } d - m,$$

con $m > 0$ (entonces se dice que hay m relaciones de integración).

Para estimar la relación de cointegración, se ajusta una regresión lineal entre las variables potencialmente cointegradas y se evalúa el orden de integración de los residuos.

- La situación más habitual es tener dos series $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ que son $I(1)$ y encontrar por MCO un $\hat{\alpha}$ tal que $\boldsymbol{y} - \hat{\alpha}\boldsymbol{x}$ es $I(0)$.

La cointegración entre series temporales tiene dos interpretaciones interrelacionadas:

1. Las series poseen *una tendencia común* (pues hay una combinación lineal entre ellas que cancela dicha tendencia).
2. *Existe un equilibrio a largo plazo entre dichas series*, de manera que las desviaciones del equilibrio tienden a desaparecer a corto plazo.

2.1. Ejemplo de cointegración: tipos de interes en UK a corto y largo plazo

Generamos un dataframe con los datos:

```
path = '../datos/'
df2 = pd.read_csv(path+'UK_Interest_rates.csv')
print(df2.head(3))
```

Y los graficamos:

```
# Crear figuras y ejes con proporción 15:4
fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(15, 4))
# Representar Long
ax1.set_xlabel('Año')
ax1.set_ylabel('Long', color='tab:blue')
ax1.plot(df2['obs'], df2['Long'], color='tab:blue')
ax1.tick_params(axis='y', labelcolor='tab:blue')
# Crear un segundo eje para Short
ax2 = ax1.twinx()
ax2.set_ylabel('Short', color='tab:orange')
ax2.plot(df2['obs'], df2['Short'], color='tab:orange')
ax2.tick_params(axis='y', labelcolor='tab:orange')
# Configurar el eje x para mostrar un tic en el primer trimestre de cada año
xticks = df2['obs'][df2['obs'].str.endswith('Q1')]  # Tics en Q1
ax1.set_xticks(xticks)
ax1.set_xticklabels(xticks, rotation=45, ha='right')
# Añadir líneas verticales en los tics
for tick in xticks:
    ax1.axvline(x=tick, color='lightgrey', linestyle='--', linewidth=0.5)
# Añadir título
plt.title('Tipos a largo y a corto plazo en el Reino Unido')
plt.savefig('./img/lecc09/UK_Interest_rates.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
```

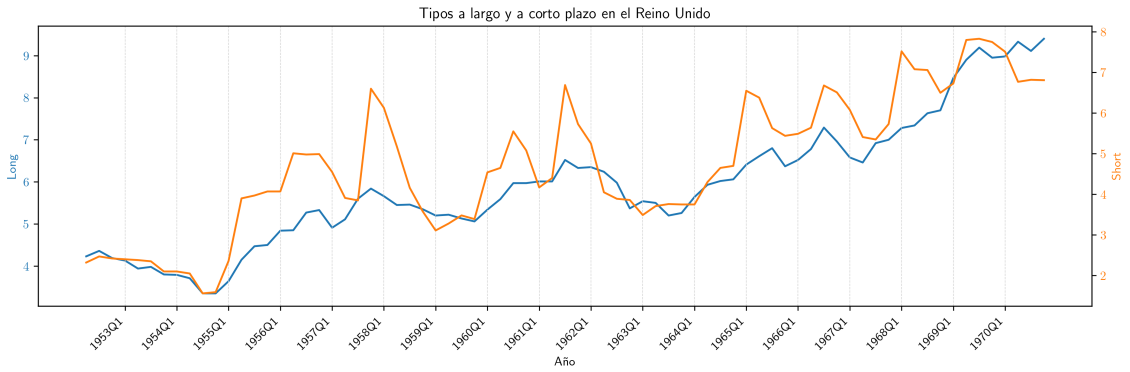
Y calculamos la correlación de ambas series:

```
correlationUKinterestRates = df2['Long'].corr(df2['Short'])
print(f'Coeficiente de correlación: {correlationUKinterestRates:.3f}')
```

`Long` rendimiento porcentual a 20 años de los bonos soberanos del Reino Unido

`Short` rendimiento de las letras del tesoro a 91 días

(Muestra: 1952Q2–1970Q4)



Como ambas series presentan una tendencia creciente, **la correlación es muy elevada:**

- Valor del coeficiente de correlación: `np.float64(0.898)`

2.1.1. Series en diferencias

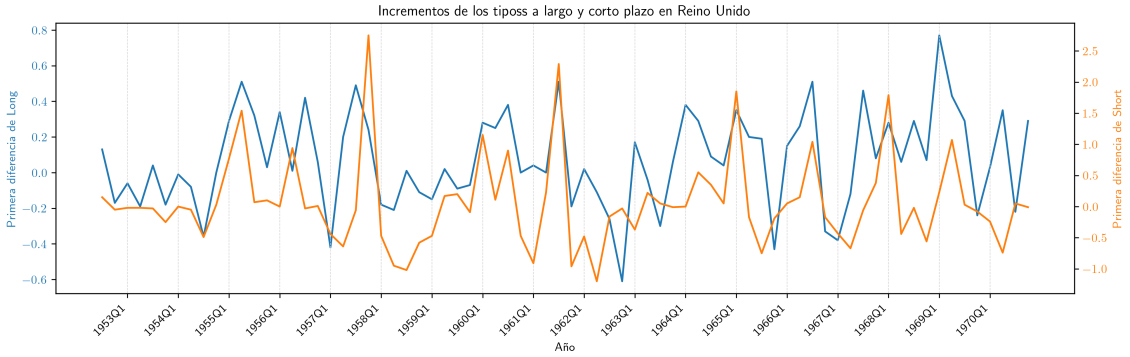
Añadamos al dataframe la primera diferencia de cada una de las series temporales:

```
# creamos nuevas columnas con las primeras diferencias
df2['Long_diff'] = df2['Long'].diff()
df2['Short_diff'] = df2['Short'].diff()
print(df2.head(3))
```

```
      obs  Long  Short  Long_diff  Short_diff
0  1952Q2  4.23   2.32        NaN         NaN
1  1952Q3  4.36   2.47       0.13        0.15
2  1952Q4  4.19   2.42      -0.17       -0.05
```

Y generemos el gráfico de las series diferenciadas:

```
# Crear figuras y ejes con proporción 15:4
fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(15, 4))
# Representar Long
ax1.set_xlabel('Año')
ax1.set_ylabel('Primera diferencia de Long', color='tab:blue')
ax1.plot(df2['obs'], df2['Long_diff'], color='tab:blue')
ax1.tick_params(axis='y', labelcolor='tab:blue')
# Crear un segundo eje para Short
ax2 = ax1.twinx()
ax2.set_ylabel('Primera diferencia de Short', color='tab:orange')
ax2.plot(df2['obs'], df2['Short_diff'], color='tab:orange')
ax2.tick_params(axis='y', labelcolor='tab:orange')
# Configurar el eje x para mostrar un tic en el primer trimestre de cada año
xticks = df2['obs'][df2['obs'].str.endswith('Q1')]  # Tics en Q1
ax1.set_xticks(xticks)
ax1.set_xticklabels(xticks, rotation=45, ha='right')
# Añadir líneas verticales en los tics
for tick in xticks:
    ax1.axvline(x=tick, color='lightgrey', linestyle='--', linewidth=0.5)
# Añadir título
plt.title('Incrementos de los tiposs a largo y corto plazo en Reino Unido')
plt.savefig('./img/lecc09/UK_Interest_ratesFirstDiff', dpi=300, bbox_inches='tight')
```



Regresión en primeras diferencias Resultados de la regresión en primeras diferencias de `Short` sobre `Long`

Dep. Variable:		Short_diff	**R-squared:**			0.218
Model:		OLS	**Adj. R-squared:**			0.207
No. Observations:		74	**F-statistic:**			20.11
Covariance Type:		nonrobust	**Prob (F-statistic):**			2.70e-05
	coef	**std err**	**t**	**P> |t|**	**[0.025**	**0.975]**
const	-0.0274	0.077	-0.354	0.724	-0.181	0.127
Long_diff	1.2602	0.281	4.485	0.000	0.700	1.820

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

- el ajuste muestra un coeficiente de determinación razonable,
- con una pendiente muy significativa
- y una constante que no lo es.

Esta regresión NO sugiere que la correlación en niveles sea espuria

2.1.2. Regresión de las series en niveles

Dep. Variable:		Short	**R-squared:**			0.806
Model:		OLS	**Adj. R-squared:**			0.803
No. Observations:		75	**F-statistic:**			302.8
Covariance Type:		nonrobust	**Prob (F-statistic):**			1.09e-27
	coef	**std err**	**t**	**P> |t|**	**[0.025**	**0.975]**
const	-1.1692	0.350	-3.340	0.001	-1.867	-0.471
Long	0.9986	0.057	17.403	0.000	0.884	1.113

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

El R^2 es elevado y los parámetros son estadísticamente significativos.

La relación parece ser aproximadamente: $Long_t - Short_t = 1{,}17 + U_t$.

Si los residuos fueran "estacionarios" podríamos afirmar que los tipos a corto y a largo plazo están cointegrados.

Veamos si es así...

1. Análisis gráfico de los residuos

Por el gráfico, los residuos aparentan ser "*estacionarios en media*"(i.e., no se aprecia una tendencia evidente);

```
# Obtener residuos
residuos = model_UK.resid
# Crear el gráfico de los residuos con el tamaño especificado
plt.figure(figsize=(15, 4))
plt.plot(residuos)
plt.title('Residuos de la Regresión')
plt.xlabel('Índice')
plt.ylabel('Residuos')
plt.axhline(0, color='red', linestyle='--')
plt.savefig('./img/lecc09/UK_Interest_ratesResiduals.png')
plt.close()  # Cierra la figura para liberar memoria
```

2. Contraste de hipótesis Dickey-Fuller de los residuos

```
from statsmodels.tsa.stattools import adfuller, kpss
# Contraste de Dickey-Fuller
adf_result = adfuller(residuos)
adf_stat, adf_p_value = adf_result[0], adf_result[1]
(adf_stat, adf_p_value)
```

np.float64 (-3.9628747023366064) np.float64 (0.0016178852082981026)

Un p-valor tan bajo indica que debemos rechazar la hipótesis nula de que la serie es $I(1)$ con un nivel de significación del $\alpha = 0{,}002$

3. Contraste de hipótesis KPSS de los residuos

```
# Contraste de KPSS
kpss_result = kpss(residuos, regression='c')
kpss_stat, kpss_p_value = kpss_result[0], kpss_result[1]
(kpss_stat, kpss_p_value)
```

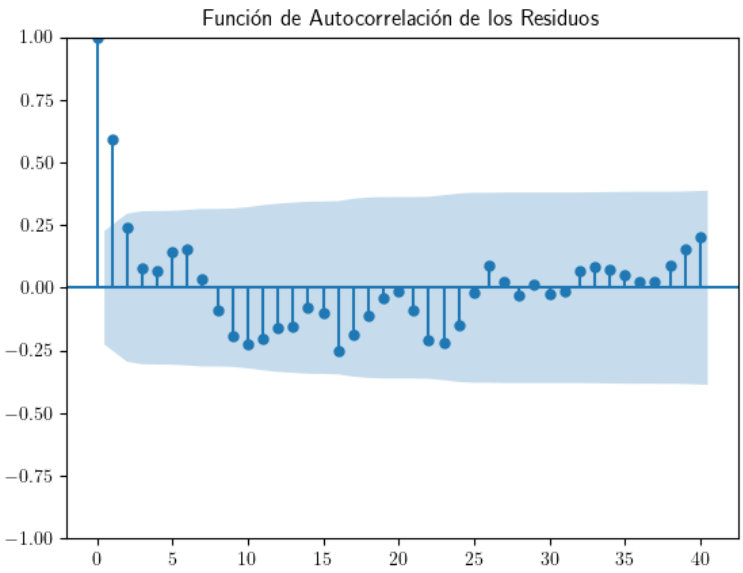
El test KPSS nos indica que el p-valor es mayor a 0,1; por tanto no podemos rechazar la hipótesis nula de que la serie es $I(0)$ a los niveles de significación del 1, 5 o 10 %.

4. Función de autocorrelación simple ACF de los residuos

```
from statsmodels.graphics.tsaplots import plot_acf

# Visualizar la función de autocorrelación
plt.figure(figsize=(10, 5))
plot_acf(residuos, lags=40)
plt.title('Función de Autocorrelación de los Residuos')
plt.savefig('./img/lecc09/UK_Interest_rates_ACF.png')
plt.close()  # Cierra la figura para liberar memoria
```

Su aspecto es el de una serie estacionaria.



También podemos comprobar que el valor de la autocorrelación de orden 1 está lejos de la unidad.

```
# Calcular la autocorrelación de orden 1
np.corrcoef(residuos[:-1], residuos[1:])[0, 1]
```

```
np.float64(0.6120404093910319)
```

Su valor es claramente inferior a 1.

2.1.3. Conclusión

Los análisis realizados sobre los residuos de la regresión entre los tipos de interés a corto y largo plazo sugieren que estos se comportan como un proceso estacionario.

- La gráfica no muestra una tendencia clara.
- El contraste de Dickey-Fuller mostró un p-valor de aproximadamente 0.0016, lo que permite rechazar la hipótesis nula de que la serie es no estacionaria.

- Por otro lado, el test KPSS resultó en un p-valor mayor a 0.1, indicándonos que no podemos rechazar la hipótesis nula de estacionariedad.
- Además, la función de autocorrelación de los residuos presenta un comportamiento típico de series estacionarias y una autocorrelación de orden 1 de aproximadamente 0.612, notablemente inferior a 1, lo que refuerza la conclusión de que los residuos no muestran una tendencia sistemática.

Los contrastes de raíz unitaria de las series que concluyen que son $I(1)$, más las regresiones efectuadas y la conclusión de que los residuos son $I(0)$, sugieren que los cambios en los tipos de interés a corto y largo plazo pueden estar cointegrados, lo que implica una relación estable entre ambas variables a lo largo del tiempo de tipo:

$$Long_t - Short_t = Cte + U_t.$$

Bibliografía:

- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Enders, W. (2010). *Applied Econometric Time Series*. Wiley.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., Shin, Y. (1992). "Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root."*Journal of Econometrics*, 54(1-3), 159-178.
- Dickey, D. A., Fuller, W. A. (1981). "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root."*Econometrica*, 49(4), 1057-1072.