

Índice

1. Función de autocovarianzas y función de autocorrelación (ACF)	2
2. Función de autocorrelación parcial (PACF)	3
3. Densidad espectral	4
4. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales	4
4.1. Procesos lineales causales	4
4.2. Proceso de Ruido Blanco	5
4.3. Proceso de media móvil MA(q)	6
4.4. Proceso de media móvil MA(1)	6
4.4.1. MA(1) con raíz positiva	7
4.4.2. MA(1) con raíz negativa	8
4.5. Proceso de media móvil MA(2)	8
4.5.1. MA(2) con $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$	9
4.5.2. MA(2) con $\theta_1 < 0$ y $\theta_2 < 0$	10
4.5.3. MA(2) con $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 < 0$	10
4.5.4. MA(2) con $\theta_1 < 0$ y $\theta_2 : 0$	11
4.5.5. MA(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa	12
4.5.6. MA(2) con un par de raíces complejas	13
4.5.7. MA(2) con dos raíces reales y negativas	14
4.5.8. MA(2) con dos raíces reales y positivas	15
4.6. Proceso autorregresivo AR(p)	16
4.6.1. Demostración de que la PACF tiene cogrado $-p$ y grado p	16
4.7. Proceso autorregresivo AR(1)	17
4.7.1. AR(1) con raíz positiva	18
4.7.2. AR(1) con raíz negativa	19
4.8. Proceso autorregresivo AR(2)	19
4.8.1. AR(2) con $\phi_1 > 0$ y $\phi_2 > 0$	20
4.8.2. AR(2) con $\phi_1 < 0$ y $\phi_2 < 0$	21
4.8.3. AR(2) con $\phi_1 > 0$ y $\phi_2 < 0$	21
4.8.4. AR(2) con $\phi_1 < 0$ y $\phi_2 : 0$	22
4.8.5. AR(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa	23
4.8.6. AR(2) con un par de raíces complejas	24
4.8.7. AR(2) con dos raíces reales y negativas	25
4.8.8. AR(2) con dos raíces reales y positivas	26
5. (Resumen) características de procesos MA(q)	26
6. (Resumen) características de procesos AR(p)	27
7. Nota final	27

Econometría Aplicada. Lección 6

Marcos Bujosa

20 de noviembre de 2024

Resumen

En esta lección veremos tres funciones que describen las características correspondientes a los momentos de segundo orden de los procesos lineales: la función de autocorrelación (ACF), la función de autocorrelación parcial (PACF) y la densidad espectral (estas tres funciones son transformaciones de la función de autocovarianzas del proceso). Veremos la estructura de estas funciones en procesos lineales genéricos y luego particularizaremos a procesos de ruido blanco, procesos MA y procesos AR.

Carga de algunas librerías de R

Primero cargamos la librería `tfarima` (Repositorio Cran: <https://cran.r-project.org/web/packages/tfarima/index.html>; repositorio GitHub: <https://github.com/gallegoj/tfarima>)

```
library(tfarima) # librería de José Luis Gallego para Time Series
library(readr)  # para leer ficheros CSV
library(ggplot2) # para el scatterplot (alternativamente library(tidyverse))
library(ggfortify) # para pintar series temporales
library(jtools) # para representación resultados estimación
library(zoo)    # para generar objetos ts (time series)
```

y además fijamos los parámetros por defecto para las figuras en `png` del notebook

```
# fijamos el tamaño de las figuras que se generan en el notebook
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 4, repr.plot.res = 200)
```

1. Función de autocovarianzas y función de autocorrelación (ACF)

Sabemos que si un proceso estocástico es estacionario, la covarianza entre X_t y X_{t+k} no depende de t ; tan solo depende de la distancia temporal k entre ambas variables aleatorias: $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k$. También sabemos que

- La secuencia $\gamma = (\gamma_k \mid k \in \mathbb{Z})$ se denomina *función de autocovarianzas*
- Dividiendo γ por γ_0 obtenemos la secuencia $\rho = (\rho_k \mid k \in \mathbb{Z})$ donde

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0},$$

que se denomina *función de autocorrelación* (ACF).

Veamos otras transformaciones de γ que subrayan diferentes características de la interdependencia temporal en un proceso estocástico.

2. Función de autocorrelación parcial (PACF)

Dado un conjunto de variables $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$, la *correlación condicional* $\rho_{X,Y|\mathbf{Z}}$ entre las variables X e Y es

$$\rho_{X,Y|\mathbf{Z}} = \text{Corr}\left(X - E(X | \mathbf{Z}), Y - E(Y | \mathbf{Z})\right)$$

El problema es que no siempre es fácil conocer las esperanzas condicionadas $E(X | \mathbf{Z})$ y $E(Y | \mathbf{Z})$.

Pero es sencillo restar de X y de Y los ajustes \widehat{X} y \widehat{Y} correspondientes a sus respectivas regresiones lineales sobre \mathbf{Z} . La correlación entre ambos residuos se denomina *correlación parcial* entre X e Y ; y mide la correlación entre ambas variables una vez “descontado” el efecto lineal de las variables \mathbf{Z} .

$$\text{Corr}\left((X - \widehat{X}), (Y - \widehat{Y})\right)$$

La *correlación parcial* entre dos variables X_t y X_{t-k} de un proceso estacionario \mathbf{X} mide su correlación una vez descontado el efecto de las variables $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$ que median entre ambas.

$$X_t, \overbrace{X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}}^{\text{mediadores}}, X_{t-k}$$

Si denotamos con \widehat{X}_t y \widetilde{X}_{t-k} los ajustes de las respectivas regresiones de X_t y X_{t-k} sobre $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$; la *correlación parcial* π_k entre X_t y X_{t+k} es la correlación entre los residuos de sendas regresiones:

$$\pi_k = \text{Corr}\left((X_t - \widehat{X}_t), (X_{t-k} - \widetilde{X}_{t-k})\right)$$

En un proceso débilmente estacionario las correlaciones parciales solo dependen de la distancia k , lo que permite definir la siguiente secuencia.

La función de autocorrelación parcial (PACF) de un proceso estocástico estacionario \mathbf{X} es la siguiente secuencia $\boldsymbol{\pi}$ simétrica ($\pi_{-k} = \pi_k$):

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_k \mid k \in \mathbb{Z}) = \begin{cases} \pi_0 & = \rho_0 = 1 \\ \pi_1 & = \text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \\ \pi_k & = \text{Corr}\left((X_t - \widehat{X}_t), (X_{t-k} - \widetilde{X}_{t-k})\right) \end{cases},$$

donde \widehat{X}_t y \widetilde{X}_{t-k} son los ajustes de las respectivas regresiones de X_t y X_{t-k} sobre $X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)}$; i.e., las proyecciones ortogonales sobre $\overline{\text{span}}(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-(k-1)})$.

La magnitud de la correlación parcial π_k **refleja la mejora en la predicción de \widehat{X}_t si en lugar de usar una combinación lineal con solo los $k-1$ primeros retardos, $\widehat{X}_t = \widehat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \widehat{\alpha}_j X_{t-j}$, empleamos k retardos** (i.e., un retardo más).

(Dicha propiedad nos ayudará a elegir el orden de procesos autoregresivos).

Hay una correspondencia uno-a-uno entre la función de autocovarianzas $\boldsymbol{\gamma}$ y la PACF $\boldsymbol{\pi}$.

Es decir, es posible reconstruir una de las secuencias a partir de la otra (por ejemplo resolviendo las [ecuaciones de Yule-Walker](#) recursivamente con el algoritmo [Levinson-Durbin](#); véase [Pourahmadi, M. \(2001, Capítulo 7\)](#) o [Brockwell & Davis \(1991, Capítulo 5\)](#))

Consecuentemente, la PACF $\boldsymbol{\pi}$ puede verse como una reparametrización de la función de autocovarianzas $\boldsymbol{\gamma}$.

Veamos otra transformación de $\boldsymbol{\gamma}$ que también arrojará luz sobre las propiedades de un proceso estocástico.

3. Densidad espectral

Si \mathbf{X} es un proceso estocástico con función de autocovarianzas $\gamma \in \ell^1$, es decir, con función de autocovarianzas absolutamente sumable,

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma_h| < \infty,$$

entonces definimos la *densidad espectral* de \mathbf{X} como

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_h e^{-ih\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \geq 0} \gamma_h \cos(h\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

La *densidad espectral* $f(\omega)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $f(\omega) = f(-\omega)$
2. $f(\omega) \geq 0$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega < \infty$

Es más, partiendo de la densidad espectral se pueden calcular las covarianzas

$$\gamma_h = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-ih\omega} d\omega; \quad h \in \mathbb{Z}$$

Consecuentemente, para $h = 0$

$$\sigma^2 = \gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega.$$

Por tanto podemos interpretar la densidad espectral como una descomposición de la varianza oscilaciones de distintas frecuencias (o periodos).

(*Periodo* = $\frac{1}{\text{Frecuencia}}$, donde la *Frecuencia* = N° de ciclos por unidad de tiempo).

La ACF, la PACF y la *densidad espectral* son funciones que dependen únicamente de los dos primeros momentos de la distribución.

Su estimación y posterior análisis son la herramienta fundamental para elegir un modelo ARMA para una serie temporal “*estacionaria*”.

Para entenderlo debemos ver cómo son estas funciones en algunos modelos lineales concretos.

4. ACF, PACF y densidad espectral de algunos modelos lineales

4.1. Procesos lineales causales

Sea el proceso $\mathbf{X} = \psi * \mathbf{U}$, donde $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y $\psi \in \ell^2$ es una serie formal:

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j U_{t-j}.$$

Por la [lección anterior](#) sabemos que $E(X_t) = 0$ y que

$$\blacksquare \gamma = \sigma^2 \psi(z) * \psi(z^{-1})$$

Es decir,

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+|k|} \cdot \psi_j.$$

Por otra parte, $\gamma_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$

Demostración: aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\gamma_k| \leq \sigma^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_{j+k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma^2 \left(\sum_{j=k}^{\infty} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y puesto que ψ es de cuadrado sumable, la cola $\sum_{j=k}^{\infty} |\psi_j|^2$ converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$.

A partir de γ obtenemos las otras tres funciones:

ACF: $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$

Dens. espectral: $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \geq 0} \gamma_h \cos(h\omega); \quad \omega \in [-\pi, \pi]$

PACF: $\pi \in \ell^2$, i.e., $\pi_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$

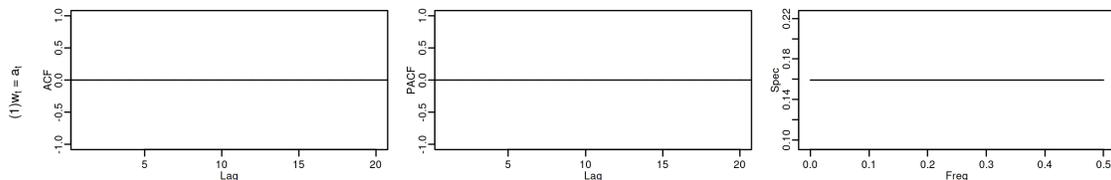
(Cuando $\pi \in \ell^2$ se dice que el proceso es *no-determinista*.)

4.2. Proceso de Ruido Blanco

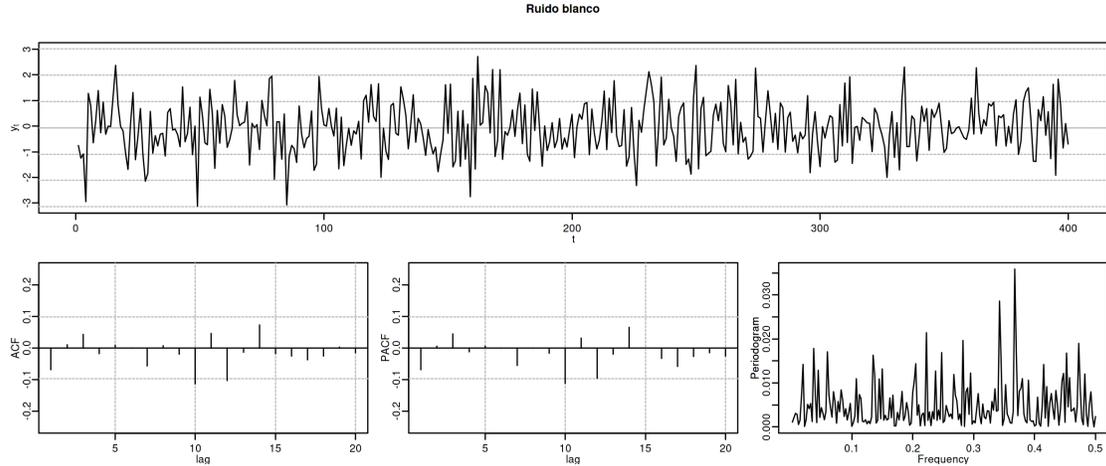
Sea $\mathbf{X} = 1 * \mathbf{U}$, donde $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$; es decir $X_t = U_t$ para $t \in \mathbb{Z}$. Entonces

- $\gamma = \sigma^2(1z^0 * 1z^0) = \sigma^2 z^0 = (\dots, 0, 0, \sigma^2, 0, 0, \dots)$
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2} \gamma = 1z^0 = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$
- $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \geq 0} \gamma_h \cos(h\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cos(0\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}; \quad \omega \in [-\pi, \pi]$
- $\pi = 1z^0 = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
wn <- um(ar = "(1 - 0B)")
display(list(wn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```



```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(wn, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"), main="Ruido blanco")
```



4.3. Proceso de media móvil MA(q)

Sea $\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U}$, con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y donde $\boldsymbol{\theta}$ es un polinomio de orden $q > 0$, con $\theta_0 = 1$ y con todas sus raíces fuera del círculo unidad ($\boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} \in \ell^1$), es decir

$$X_t = \sum_{j=1}^q \theta_j U_{t-j} + U_t.$$

Este requisito no es necesario para que el proceso sea estacionario, pero por conveniencia se usan modelos MA que puedan tener una representación AR(∞) causal (es decir, usando observaciones del pasado “para construir” el presente):

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\boldsymbol{\theta}} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

donde $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\theta}^{-\triangleright} = \boldsymbol{\theta}^{-1} \in \ell^1$. Entonces se dice que el modelo MA es “invertible”. Cualquier modelo MA sin raíces en el círculo unidad se puede reparametrizar para obtener un modelo invertible con la misma función de autocovarianzas “ $\boldsymbol{\gamma}$ ” (Véase Sección 2.6 de Fuller (1996)) y, consecuentemente, las mismas ACF, PACF y densidad espectral que el modelo original. Para tener una asociación uno a uno entre ACFs y procesos estocásticos, siempre asumiremos que las raíces de los polinomios MA, $\boldsymbol{\theta}$, son mayores que uno en valor absoluto.

Entonces $E(X_t) = 0$ y

$$\boldsymbol{\gamma} = \sigma^2 \boldsymbol{\theta}(z) * \boldsymbol{\theta}(z^{-1}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^q \theta_{j+k} \theta_j z^k \quad (\text{grado } q \text{ y cogrado } -q) \quad (\text{lección anterior})$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\gamma_0} \boldsymbol{\gamma}$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \boldsymbol{\theta}(e^{-i\omega}) \cdot \boldsymbol{\theta}(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^q \gamma_h \cos(h\omega); \quad \omega \in [-\pi, \pi] \quad (q \text{ cosenos} + 1)$$

π tiene grado ∞ y cogrado $-\infty$ y su magnitud decae paulatinamente cuando $k \rightarrow \infty$

4.4. Proceso de media móvil MA(1)

Sea $\mathbf{X} = (1 - \theta z) * \mathbf{U}$ con $|\theta| < 1$ y con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, es decir

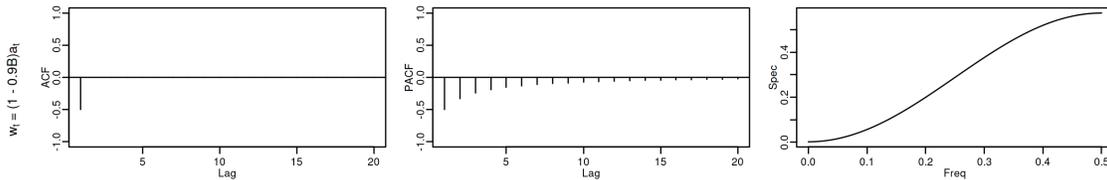
$$X_t = U_t - \theta U_{t-1}.$$

- $\gamma = \sigma^2(1 - \theta z) * (1 - \theta z^{-1}) = \sigma^2(\dots, 0, -\theta, (1 + \theta^2), -\theta, 0, \dots)$
- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2(1 + \theta^2)} \gamma = (\dots, 0, \frac{-\theta}{1 + \theta^2}, 1, \frac{-\theta}{1 + \theta^2}, 0, \dots)$
- $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \theta(e^{-i\omega}) \cdot \theta(e^{i\omega}) = \frac{\sigma^2}{2\pi} ((1 + \theta^2) - 2\theta \cos(\omega)); \quad \omega \in [-\pi, \pi]$
- $\pi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{-\theta^k(1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(k+1)}} z^k$

4.4.1. MA(1) con raíz positiva

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma1p <- um(ma = "(1 - 0.9B)")
display(list(ma1p), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

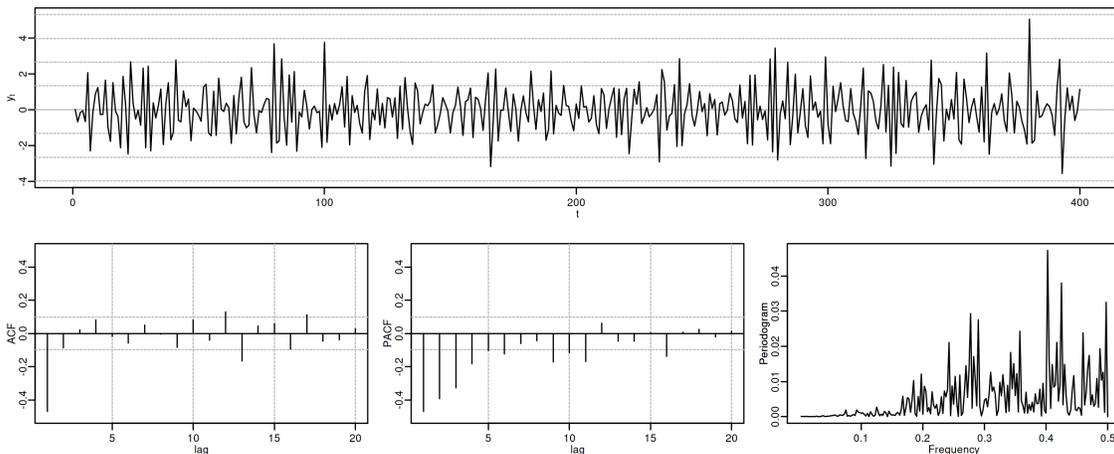
$$\theta(z) = 1 - 0,9z \quad \Rightarrow \quad X_t = (1 - 0,9B)U_t \quad (\theta > 0)$$



```
roots(ma1p)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.111111	0	1.111111	0	Inf	1

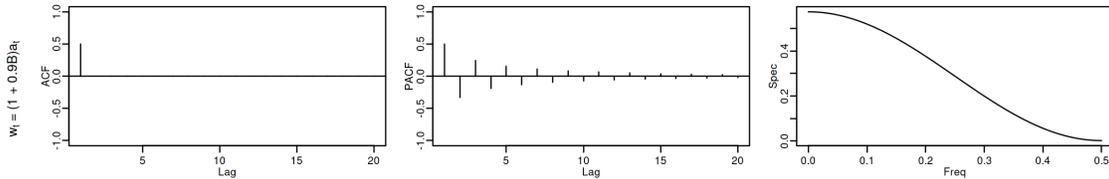
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma1p, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.4.2. MA(1) con raíz negativa

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
main <- um(ma = "(1 + 0.9B)")
display(list(main), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

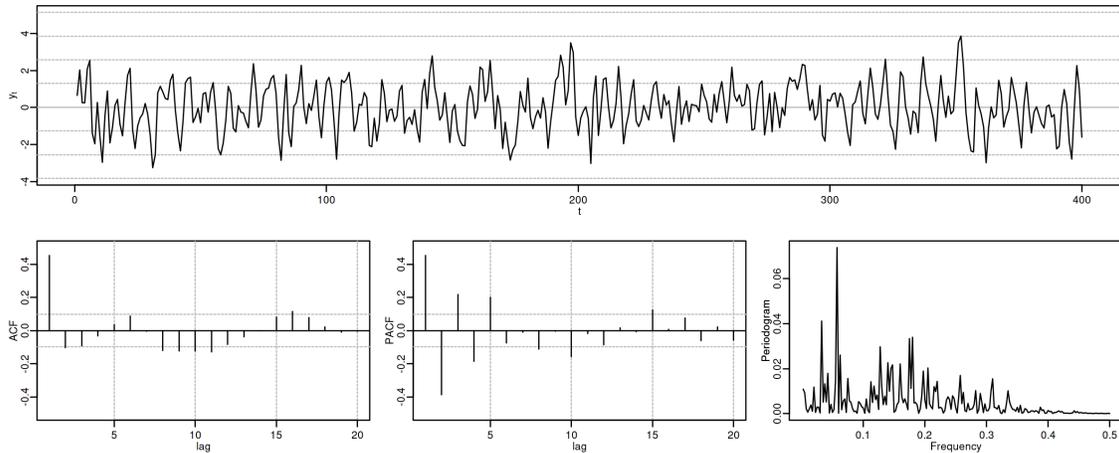
$$\theta(z) = 1 + 0,9z \Rightarrow X_t = (1 + 0,9B)U_t \quad (\theta < 0)$$



```
roots(main)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	-1.111111	0	1.111111	0.5	2	1

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(main, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5. Proceso de media móvil MA(2)

Sea $X = (1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2) * U$, con $U \sim WN(0, \sigma^2)$ y con

$$\theta_1 + \theta_2 < 1; \quad \theta_2 - \theta_1 < 1; \quad |\theta_2| < 1; \quad (\text{i.e., invertible})$$

es decir $X_t = U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2}$.

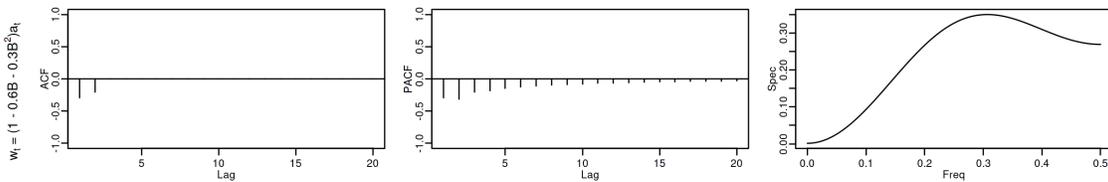
- $\gamma = \sigma^2(1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2) * (1 - \theta_1 z^{-1} - \theta_2 z^{-2})$
 $\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2); \quad \gamma_1 = \sigma^2(-\theta_1(1 - \theta_2)); \quad \gamma_2 = \sigma^2(-\theta_2)$
 $\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = 0 \quad (\text{y es simétrica})$

- $\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1}{\sigma^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} \gamma$
- $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left((1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) - 2\theta_1(1 + \theta_2) \cos(\omega) - 2\theta_2 \cos(2\omega) \right)$
- π tiene una expresión complicada, pero su magnitud decae paulatinamente.

4.5.1. MA(2) con $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2thpp <- um(ma = "(1 - 0.6B - 0.3B^2)")
display(list(ma2thpp), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

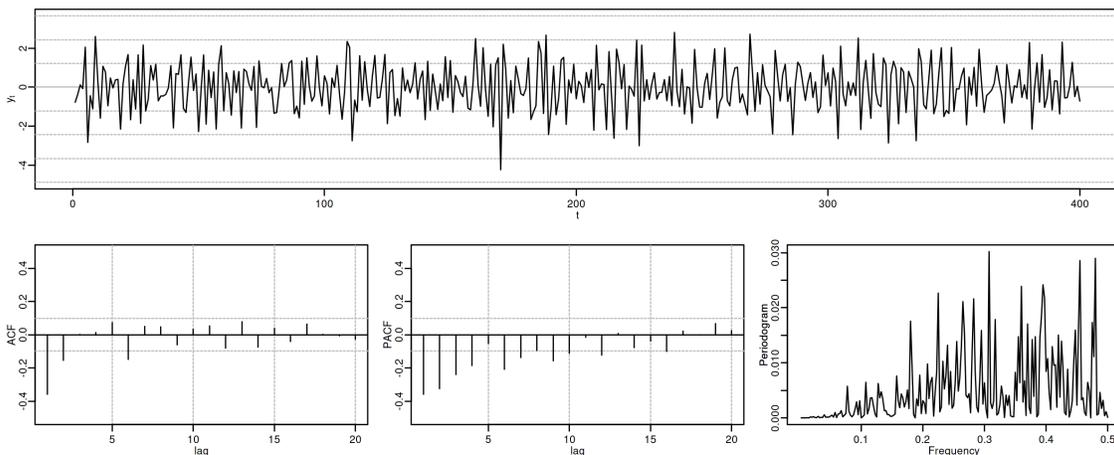
$$\theta(z) = 1 - 0,6z - 0,3z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 0,6B - 0,3B^2)U_t \quad (\theta_1 > 0 \text{ y } \theta_2 > 0)$$



```
roots(ma2thpp)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.081666	-8.077936e-28	1.081666	0.0	Inf	1
	-3.081666	8.077936e-28	3.081666	0.5	2	1

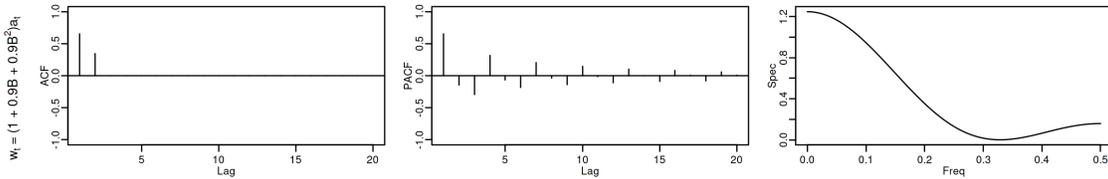
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2thpp, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5.2. MA(2) con $\theta_1 < 0$ y $\theta_2 < 0$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2thnn <- um(ma = "(1 + 0.9B + 0.9B^2)")
display(list(ma2thnn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

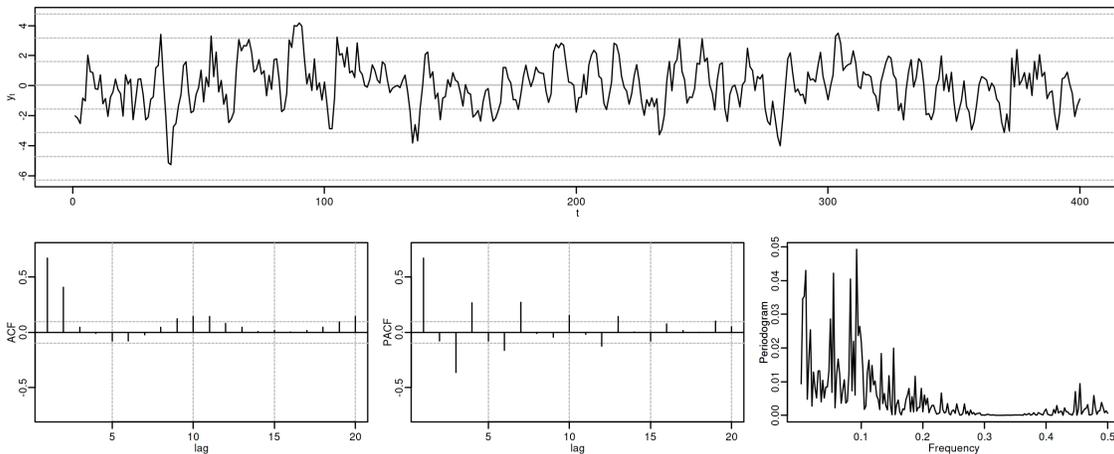
$$\theta(z) = 1 + 0,9z + 0,9z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0,9B + 0,9B^2)U_t \quad (\theta_1 < 0 \text{ y } \theta_2 < 0)$$



```
roots(ma2thnn)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	-0.5	0.9279607	1.054093	0.3286569	3.042687	1
	-0.5	-0.9279607	1.054093	0.3286569	3.042687	1

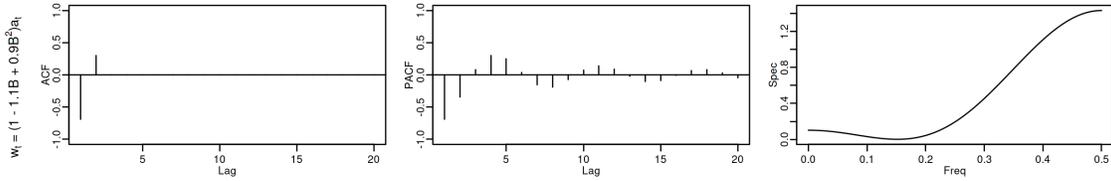
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2thnn, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5.3. MA(2) con $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 < 0$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2thpn <- um(ma = "(1 - 1.1B + 0.9B^2)")
display(list(ma2thpn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

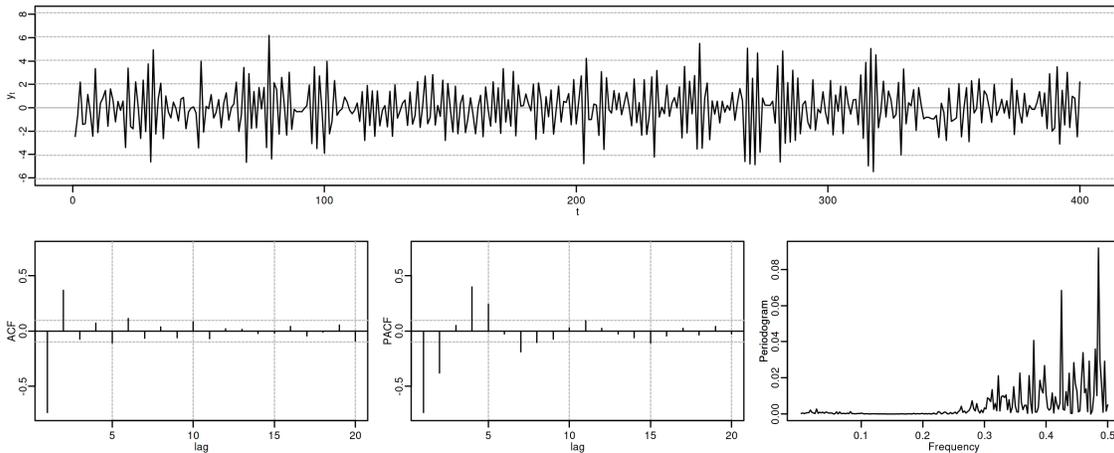
$$\theta(z) = 1 - 1,1z + 0,9z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 1,1B + 0,9B^2)U_t \quad (\theta_1 > 0 \text{ y } \theta_2 < 0)$$



```
roots(ma2thpn)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	0.6111111	0.858868	1.054093	0.1515749	6.597397	1
	0.6111111	-0.858868	1.054093	0.1515749	6.597397	1

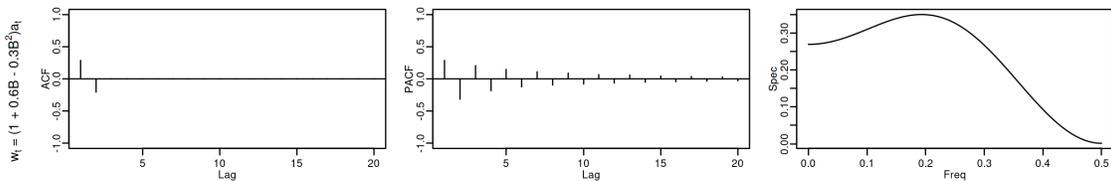
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2thpn, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5.4. MA(2) con $\theta_1 < 0$ y $\theta_2 > 0$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2thnp <- um(ma = "(1 + 0.6B - 0.3B^2)")
display(list(ma2thnp), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

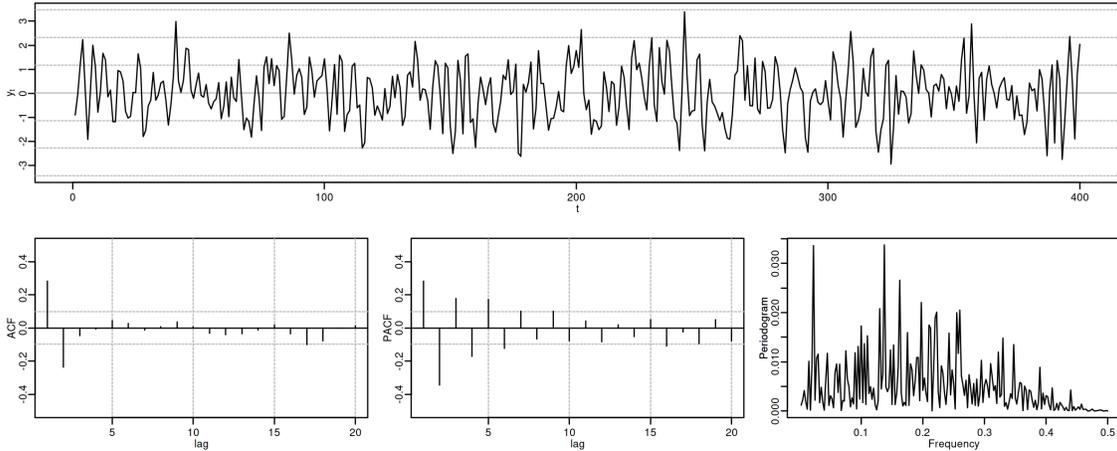
$$\theta(z) = 1 + 0,6z - 0,3z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0,6B - 0,3B^2)U_t \quad (\theta_1 < 0 \text{ y } \theta_2 > 0)$$



```
roots(ma2thnp)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	3.081666	3.831501e-21	3.081666	0.0	Inf	1
	-1.081666	-3.831501e-21	1.081666	0.5	2	1

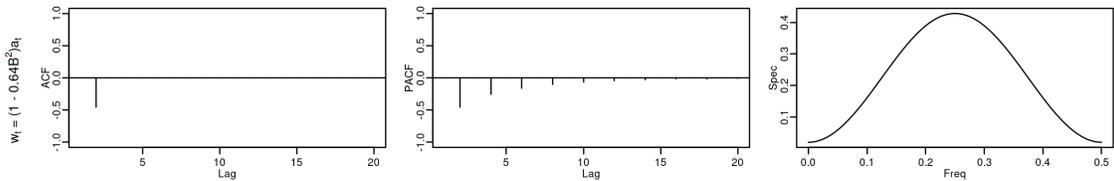
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2thnp, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5.5. MA(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2pn <- um(ma = "(1 - 0.64B^2)")
display(list(ma2pn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

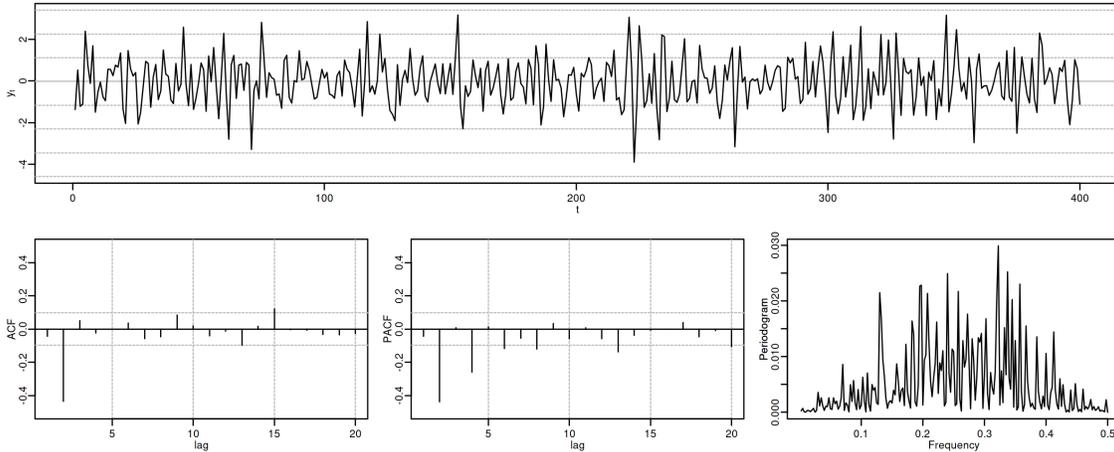
$$\theta(z) = 1 - 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 0,64B^2)U_t \quad (\text{raíces reales: +, -})$$



```
roots(ma2pn)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.25	0	1.25	0.0	Inf	1
	-1.25	0	1.25	0.5	2	1

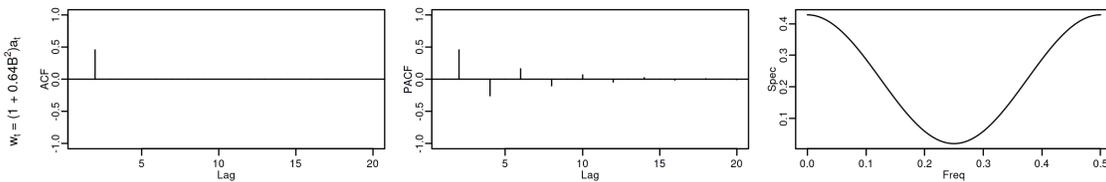
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2pn, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5.6. MA(2) con un par de raíces complejas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2np <- um(ma = "(1 + 0.64B^2)")
display(list(ma2np), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

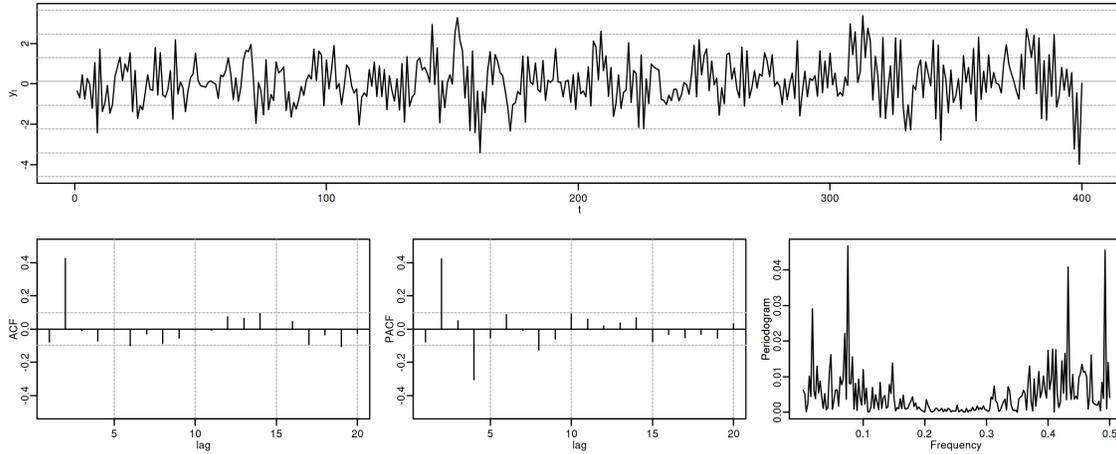
$$\theta(z) = 1 + 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 0,64B^2)U_t \quad (\text{par de raíces complejas})$$



```
roots(ma2np)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	0	1.25	1.25	0.25	4	1
	0	-1.25	1.25	0.25	4	1

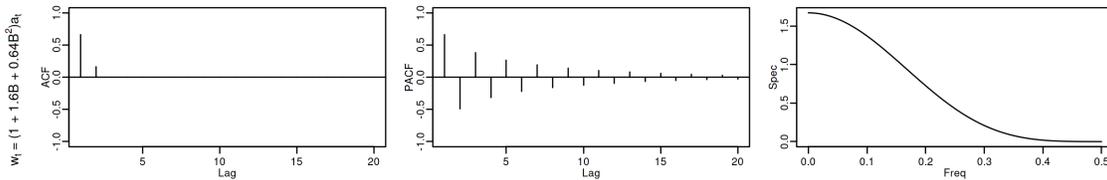
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2np, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5.7. MA(2) con dos raíces reales y negativas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2rojo <- um(ma = "(1 + 1.6B + .64B^2)")
display(list(ma2rojo), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

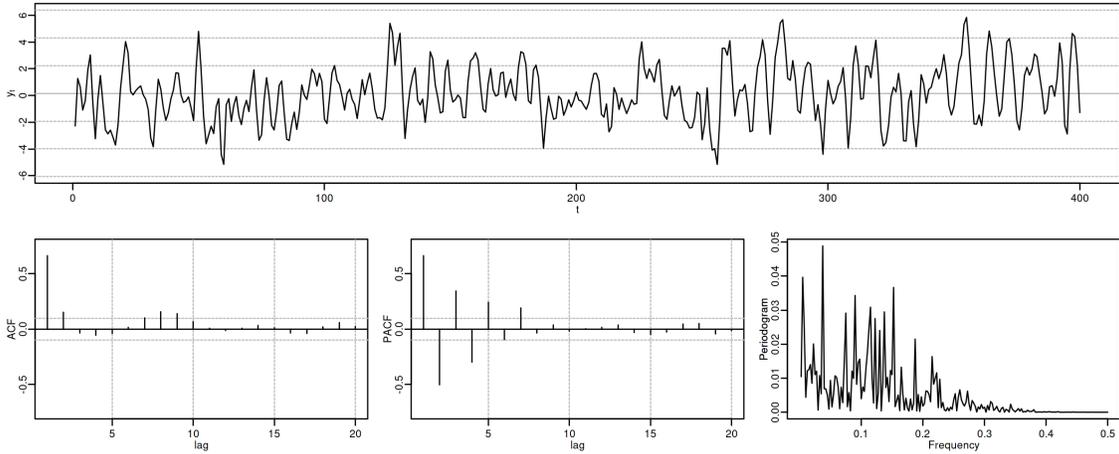
$$\theta(z) = 1 + 1,6z + 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 + 1,6B + 0,64B^2)U_t \quad (\text{r. reales: -, -})$$



```
roots(ma2rojo)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	-1.25	-1.110223e-16	1.25	0.5	2	2

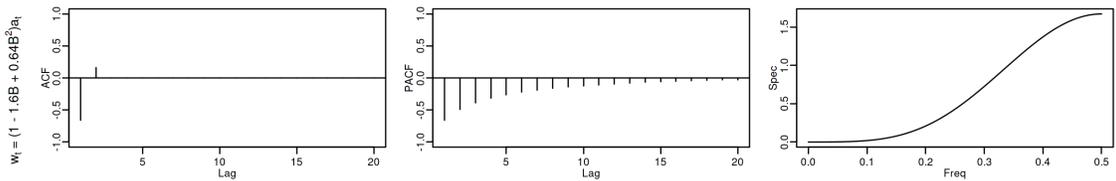
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2rojo, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.5.8. MA(2) con dos raíces reales y positivas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ma2violeta <- um(ma = "(1 - 1.6B + .64B^2)")
display(list(ma2violeta), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

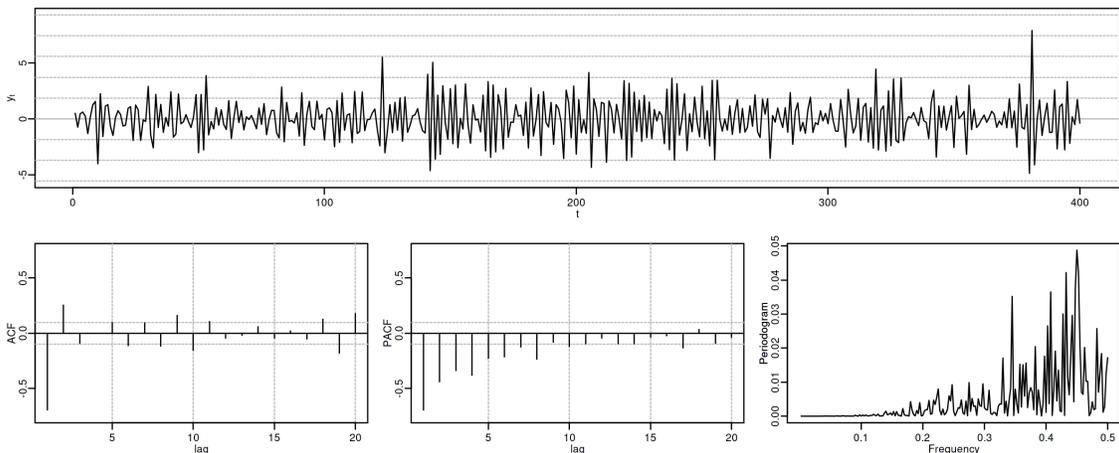
$$\theta(z) = 1 - 1,6z + 0,64z^2 \Rightarrow X_t = (1 - 1,6B + 0,64B^2)U_t \quad (\text{r. reales: } +, +)$$



```
roots(ma2violeta)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.25	-2.775558e-16	1.25	0	Inf	2

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ma2violeta, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.6. Proceso autorregresivo AR(p)

Sea $\phi * \mathbf{X} = \mathbf{U}$, con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$ y donde ϕ es un polinomio de grado $p > 0$ con $\phi_0 = 1$. Entonces

$$(\phi * \mathbf{X})_t = \phi(\mathbf{B})X_t = (1 + \phi_1\mathbf{B} + \phi_2\mathbf{B}^2 + \dots + \phi_p\mathbf{B}^p)X_t = U_t$$

Y por tanto

$$X_t = U_t - \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j}.$$

Si todas las raíces del polinomio ϕ (de grado p) están fuera del círculo unidad, es decir, si *el polinomio AR es "invertible"* ($\phi^{-p} = \phi^{-1} \in \ell^1$) entonces \mathbf{X} tiene una representación como proceso lineal causal MA(∞):

$$\phi * \mathbf{X} = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{X} = \frac{1}{\phi} * \mathbf{U} \Rightarrow X_t = U_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j U_{t-j};$$

donde $\phi^{-1} = \psi = (1, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$ tiene grado ∞ .

Por tanto $E(X_t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ y

$$\gamma = \sigma^2 \frac{1}{\phi(z)} * \frac{1}{\phi(z^{-1})} = \sigma^2 \sum_{j,k=0}^{\infty} \psi_{j+k} \psi_j z^j \quad (\text{grado } \infty) \quad (\text{Ec. de Yule-Walker})$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{\phi(e^{-i\omega}) \cdot \phi(e^{i\omega})} = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_h \cos(h\omega); \quad \text{donde } \omega \in [-\pi, \pi].$$

(suma infinita de cosenos)

Pero la PACF, π , es una secuencia con grado p y cogrado $-p$ ([demo en los apuntes](#)).

4.6.1. Demostración de que la PACF tiene cogrado $-p$ y grado p

- Sea \mathbf{X} un proceso causal AR(p): $X_t = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + U_t$ donde $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$.
- La proyección de X_{k+1} sobre el espacio $\bar{s}p(X_2 : X_k)$ generado por X_2, \dots, X_k (con $k > p$) es:

$$\widehat{X_{k+1}} = P_{\bar{s}p(X_2 : X_k)}(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{k+1-j}$$

- De su representación MA(∞): $Y \in \bar{s}p(X_2 : X_k) \Rightarrow Y \in \bar{s}p(U_j \mid j \leq k)$, pues

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j U_{t-j} \Rightarrow \bar{s}p(X_2 : X_k) \subset \bar{s}p(U_j \mid j \leq k) \perp U_{k+1}$$

- Si $Y \in \bar{s}p(X_2 : X_k)$ entonces $Cov((X_{k+1} - \widehat{X_{k+1}}), Y) = Cov(U_{k+1}, Y) = 0$
- Denotemos con \widetilde{X}_1 a la proyección $P_{\bar{s}p(X_2 : X_k)}(X_1)$ de X_1 sobre $\bar{s}p(X_2 : X_k)$
- Ahora es fácil ver que $\pi_k = 0$ para $k > p$, pues

$$\begin{aligned} \pi_k &= Corr((X_{k+1} - \widehat{X_{k+1}}), (X_1 - \widetilde{X}_1)) \\ &= Corr(U_{k+1}, (X_1 - \widetilde{X}_1)) = 0 \end{aligned}$$

ya que $U_{k+1} \perp (X_1 - \widetilde{X}_1) \in \bar{s}p(U_j \mid j \leq k)$.

4.7. Proceso autorregresivo AR(1)

Sea $(1 - \phi z) * \mathbf{X} = \mathbf{U}$, con $|\phi| < 1$ y con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, es decir

$$X_t = \phi X_{t-1} + U_t.$$

Como

$$(1 - az) * (1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 + \dots) = 1,$$

ahora hay que calcular infinitos términos en

$$\gamma = \sigma^2(1 - \phi z)^{-1} * (1 - \phi z^{-1})^{-1}.$$

Hay varias formas de hacer los cálculos. Una es vía los productos convolución; puesto que

$$(1 - a^2 z)^{-1} = (1 + a^2 z + a^4 z^2 + a^6 z^3 + \dots) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} a^{2|h|} z^h$$

(para verlo basta sustituir a^2 por b), tenemos que $(1 - az)^{-1} * (1 - az^{-1})^{-1}$ es:

$$\begin{array}{cccccccc} (\dots, & 0, & 0, & 0, & 1, & a, & a^2, & a^3, & \dots) \\ * (\dots, & a^3, & a^2, & a, & 1, & 0, & 0, & 0, & \dots) \\ \hline = (\dots, & \frac{a^3}{1+a^2}, & \frac{a^2}{1+a^2}, & \frac{a}{1+a^2}, & \frac{1}{1+a^2}, & \frac{a}{1+a^2}, & \frac{a^2}{1+a^2}, & \frac{a^3}{1+a^2}, & \dots) \end{array}$$

(donde además hemos sustituido z por 1 , pues cada término es una suma).

Es decir $(1 - az)^{-1} * (1 - az^{-1})^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a^{|k|}}{1-a^2} z^k$; y por tanto

$$\gamma = \sigma^2(1 - \phi z)^{-1} * (1 - \phi z^{-1})^{-1} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^{|k|} z^k$$

Pero también podemos usar las Ecuaciones de Yule-Walker (Lecc. 5). En este caso (donde el único parámetro es $\phi_1 = \phi$), en cuanto a la ACF tenemos que:

$$\rho_k = \phi \rho_{k-1} \quad k > 0$$

y como $\rho_0 = 1$

$$\rho_k = \phi^k \quad k \geq 0$$

Y en cuanto a la varianza, dado que $\rho_1 = \phi$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \rho_1 \phi} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

Por tanto, la función de autocovarianzas es

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \boldsymbol{\rho} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^{|k|} z^k$$

Así pues, si $(1 - \phi z) * \mathbf{X} = \mathbf{U}$, con $|\phi| < 1$ y con $\mathbf{U} \sim WN(0, \sigma^2)$, es decir, si

$$X_t = \phi X_{t-1} + U_t$$

como $\mathbf{X} = (1 - \phi z)^{-1} * \mathbf{U}$, tenemos que

$$\gamma = \sigma^2(1 - \phi z)^{-1} * (1 - \phi z^{-1})^{-1} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi^{|k|} z^k \quad \text{grado } \infty \text{ y cogrado } -\infty$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma_0} \gamma = \frac{1 + \phi^2}{\sigma^2} \gamma = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi^{|j|} z^j \Rightarrow \rho_k = \phi^k \text{ para } k \geq 0.$$

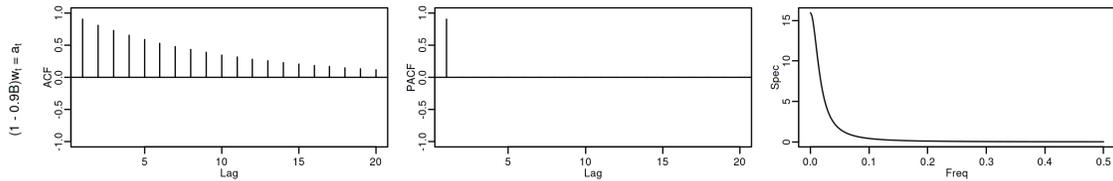
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_h \cos(h\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos(\omega)} \quad (\text{compárese con MA(1)}).$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\dots, 0, 0, \phi, 1, \phi, 0, 0, \dots) \quad \text{grado 1 y cogrado } -1$$

4.7.1. AR(1) con raíz positiva

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar1p <- um(ar = "(1 - 0.9B)")
display(list(ar1p), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

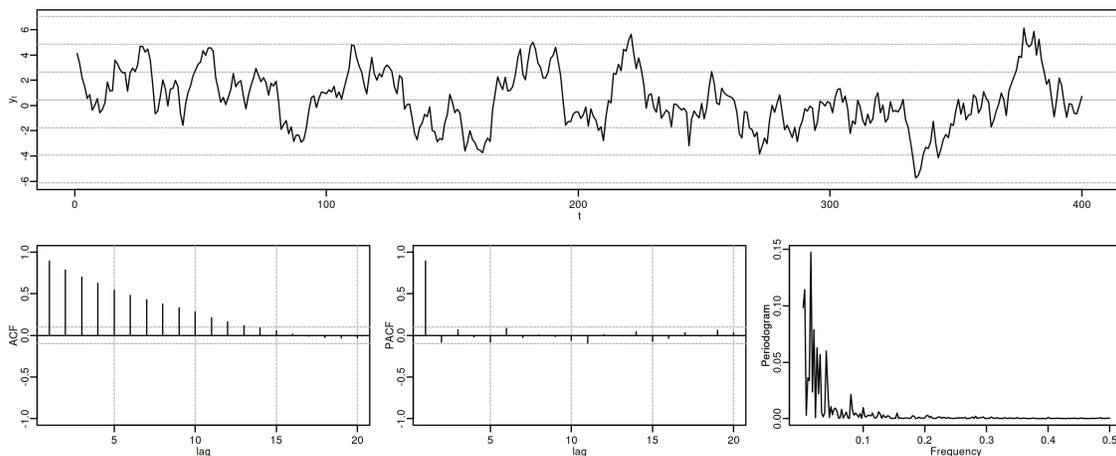
$$\phi(z) = 1 - 0,9z \Rightarrow X_t = 0,9X_{t-1} + U_t \quad (\phi > 0)$$



```
roots(ar1p)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.111111	0	1.111111	0	Inf	1

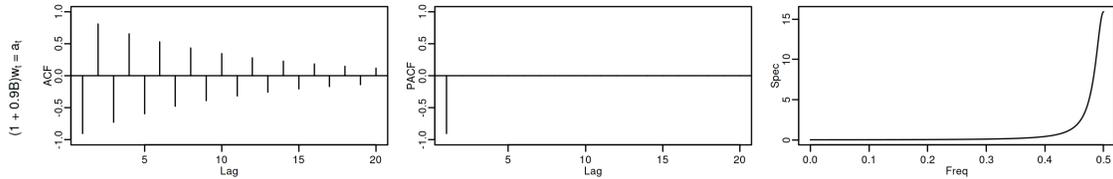
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar1p, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.7.2. AR(1) con raíz negativa

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
arin <- um(ar = "(1 + 0.9B)")
display(list(arin), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

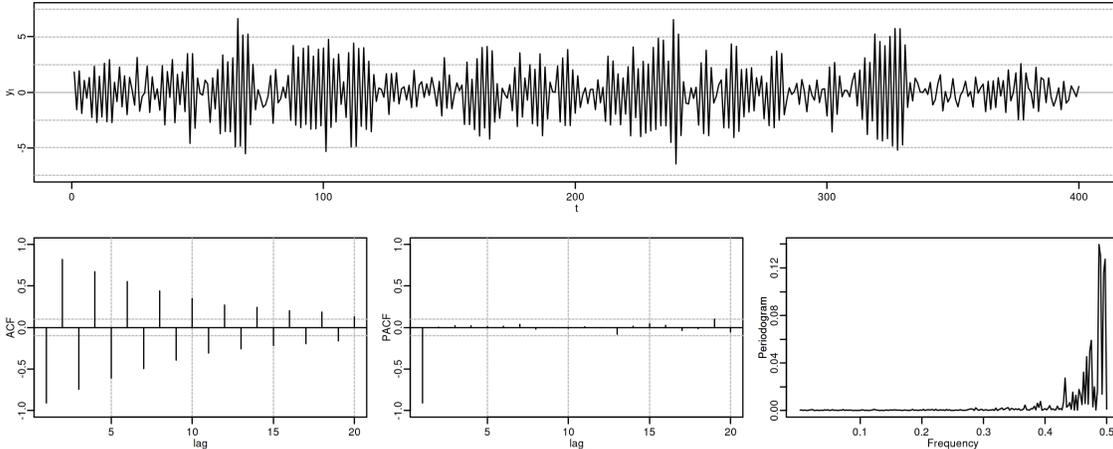
$$\phi(z) = 1 + 0,9z \Rightarrow X_t = -0,9X_{t-1} + U_t \quad (\phi < 0)$$



```
roots(arin)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	-1.111111	0	1.111111	0.5	2	1

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(arin, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8. Proceso autorregresivo AR(2)

Sea $(1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2) * X = U$, con $U \sim WN(0, \sigma^2)$ y con

$$\phi_1 + \phi_2 < 1; \quad \phi_2 - \phi_1 < 1; \quad |\phi_2| < 1; \quad (\text{i.e., estacionario})$$

es decir

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t.$$

Entonces

$$\gamma = \sigma^2 \left(\frac{1}{\phi(z)} * \frac{1}{\phi(z^{-1})} \right)$$

(de Ec. Yule-Walker: $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2}$ y resolvemos $\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2}$ recursivamente)
 $\rho = \frac{1}{\gamma_0}\gamma$ (Verifica Ec. Yule-Walker: $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}$; decae paulatinamente)
 (con $\rho_0 = 1$ iniciamos el cálculo de $\phi(B)\rho_k = 0$ recursivamente)

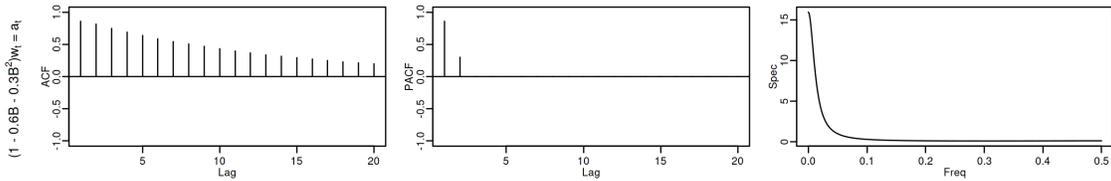
$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1+\phi_1^2+\phi_2^2-2\phi_1(1+\phi_2)\cos(\omega)-2\phi_2\cos(2\omega)}$$

$$\pi = (\dots, 0, \phi_2, \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, 1, \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \phi_2, 0, \dots)$$

4.8.1. AR(2) con $\phi_1 > 0$ y $\phi_2 > 0$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2phpp <- um(ar = "(1 - 0.6B - 0.3B^2)")
display(list(ar2phpp), lag.max = 20, byrow = TRUE) #, log.spec = TRUE
```

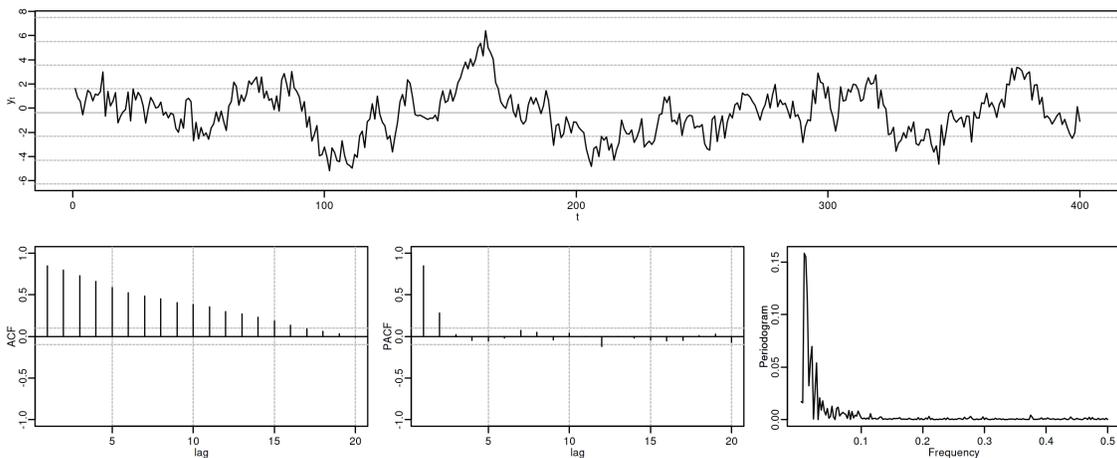
$$\phi(z) = 1 - 0,6z - 0,3z^2 \Rightarrow (1 - 0,6B - 0,3B^2)X_t = U_t \quad (\phi_1 > 0 \text{ y } \phi_2 > 0)$$



```
roots(ar2phpp)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.081666	-8.077936e-28	1.081666	0.0	Inf	1
	-3.081666	8.077936e-28	3.081666	0.5	2	1

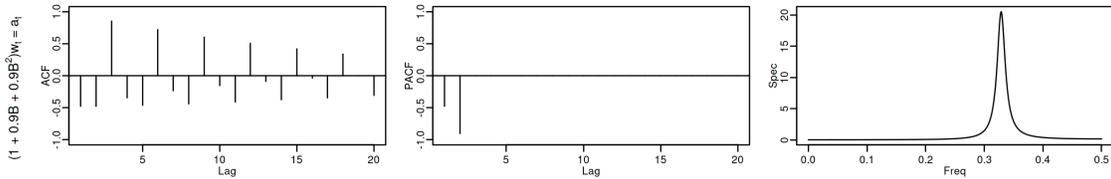
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2phpp, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8.2. AR(2) con $\phi_1 < 0$ y $\phi_2 < 0$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2phnn <- um(ar = "(1 + 0.9B + 0.9B^2)")
display(list(ar2phnn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

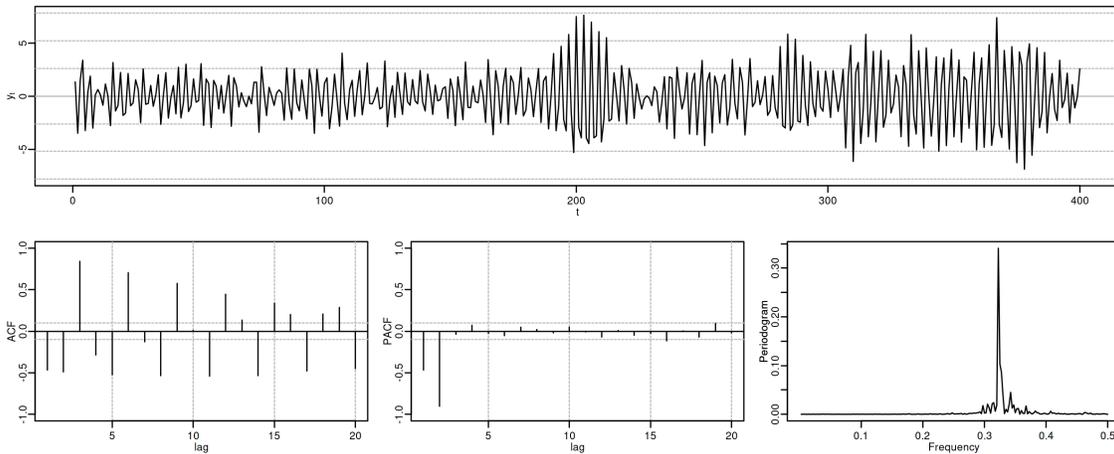
$$\phi(z) = 1 + 0,9z + 0,9z^2 \Rightarrow (1 + 0,9B + 0,9B^2)X_t = U_t \quad (\phi_1 < 0 \text{ y } \phi_2 < 0)$$



```
roots(ar2phnn)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	-0.5	0.9279607	1.054093	0.3286569	3.042687	1
	-0.5	-0.9279607	1.054093	0.3286569	3.042687	1

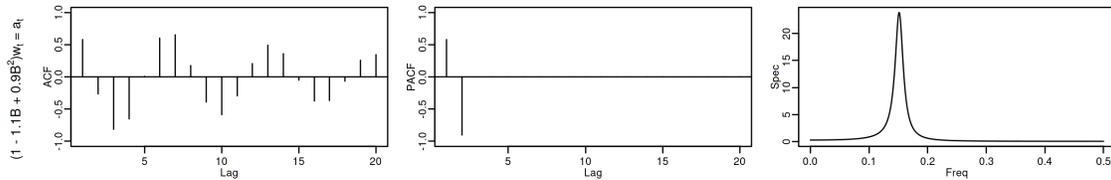
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2phnn, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8.3. AR(2) con $\phi_1 > 0$ y $\phi_2 < 0$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2phpn <- um(ar = "(1 - 1.1B + 0.9B^2)")
display(list(ar2phpn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

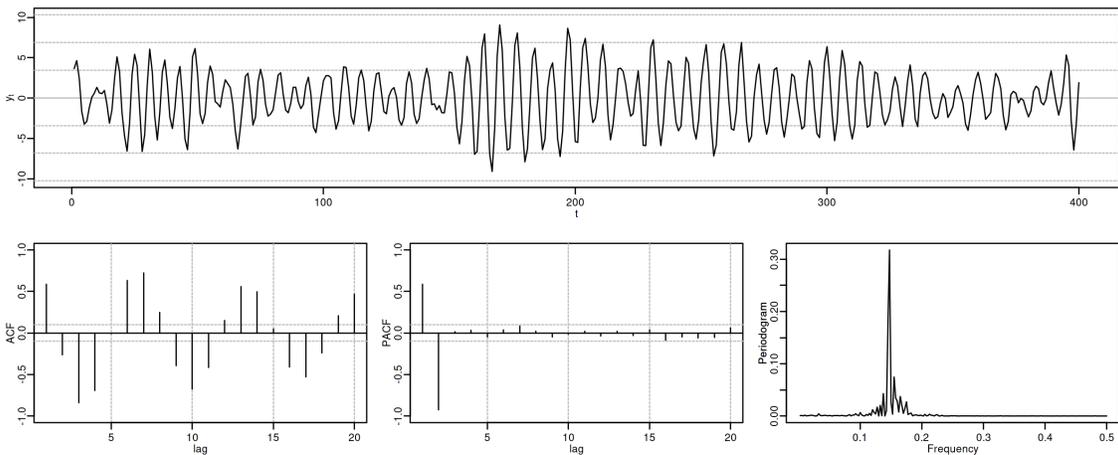
$$\phi(z) = 1 - 1,1z + 0,9z^2 \Rightarrow (1 - 1,1B + 0,9B^2)X_t = U_t \quad (\phi_1 > 0 \text{ y } \phi_2 < 0)$$



```
roots(ar2phnp)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	0.6111111	0.858868	1.054093	0.1515749	6.597397	1
	0.6111111	-0.858868	1.054093	0.1515749	6.597397	1

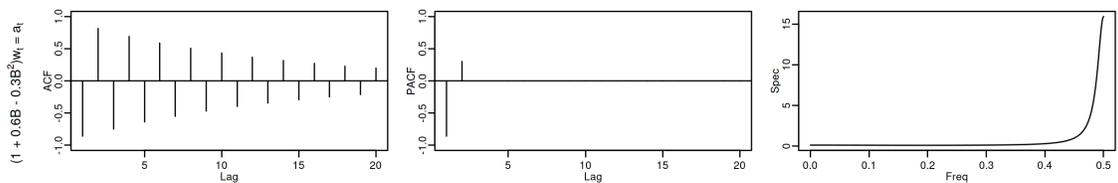
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2phnp, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8.4. AR(2) con $\phi_1 < 0$ y $\phi_2 > 0$

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2phnp <- um(ar = "(1 + 0.6B - 0.3B^2)")
display(list(ar2phnp), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

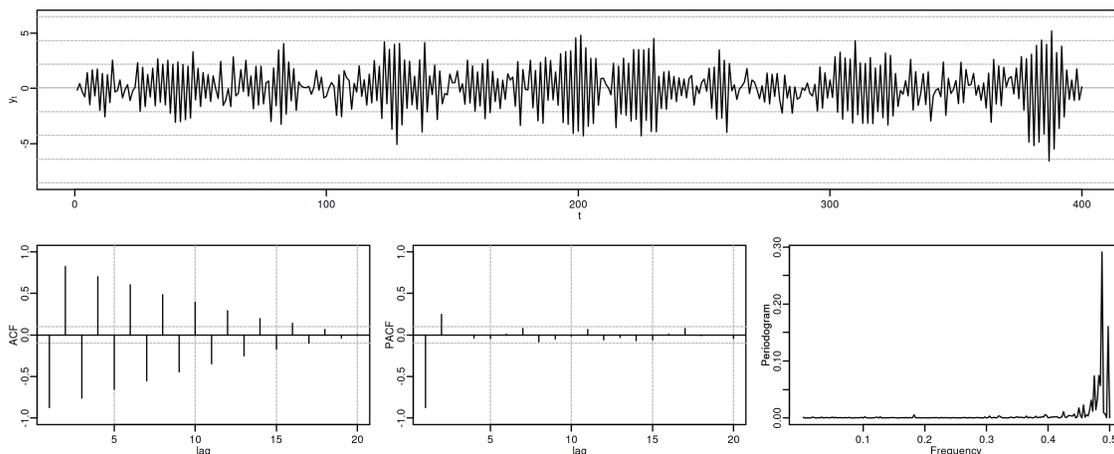
$$\phi(z) = 1 + 0,6z - 0,3z^2 \Rightarrow (1 + 0,6B - 0,3B^2)X_t = U_t \quad (\phi_1 < 0 \text{ y } \phi_2 > 0)$$



```
roots(ar2phnp)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	3.081666	3.831501e-21	3.081666	0.0	Inf	1
	-1.081666	-3.831501e-21	1.081666	0.5	2	1

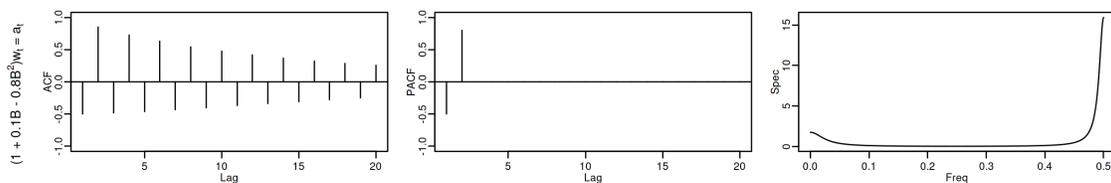
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2php, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8.5. AR(2) con dos raíces reales, una positiva y la otra negativa

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2pn <- um(ar = "(1 + 0.1B - 0.8B^2)")
display(list(ar2pn), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

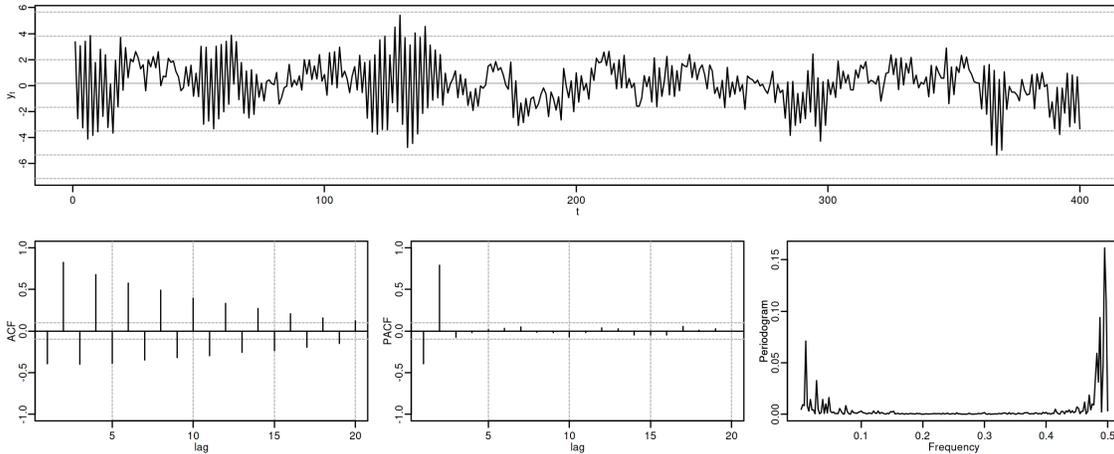
$$\phi(z) = 1 + 0,1z - 0,8z^2 \Rightarrow (1 + ,1B - ,8B^2)X_t = U_t \quad (\text{raíces reales: +, -})$$



```
roots(ar2pn)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.18228	7.754818e-26	1.18228	0.0	Inf	1
	-1.05728	-7.754818e-26	1.05728	0.5	2	1

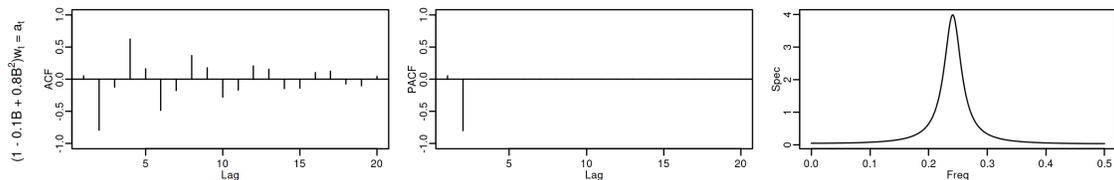
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2pn, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8.6. AR(2) con un par de raíces complejas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2np <- um(ar = "(1 - 0.1B + 0.8B^2)")
display(list(ar2np), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

$$\phi(z) = 1 - 0,1z + 0,8z^2 \Rightarrow (1 - ,1B + ,8B^2)X_t = U_t \quad (\text{par de } r. \text{ complejas})$$

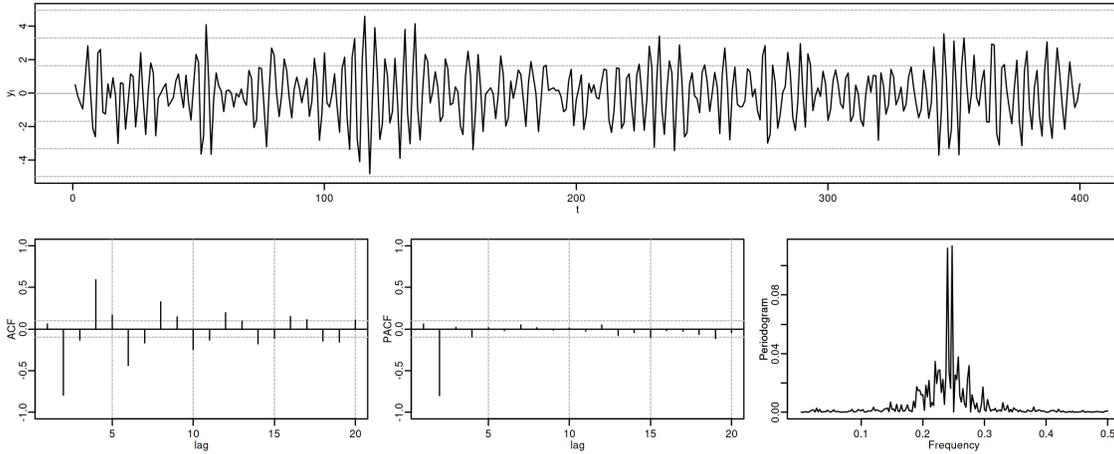


```
roots(ar2np)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	0.0625	1.116286	1.118034	0.2410983	4.147685	1
	0.0625	-1.116286	1.118034	0.2410983	4.147685	1

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2np, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```

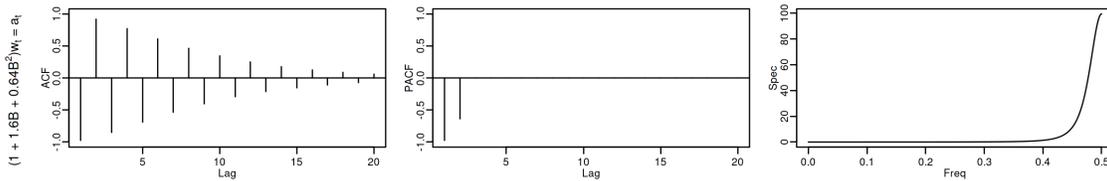
C



4.8.7. AR(2) con dos raíces reales y negativas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2azul <- um(ar = "(1 + 1.6B + .64B^2)")
display(list(ar2azul), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

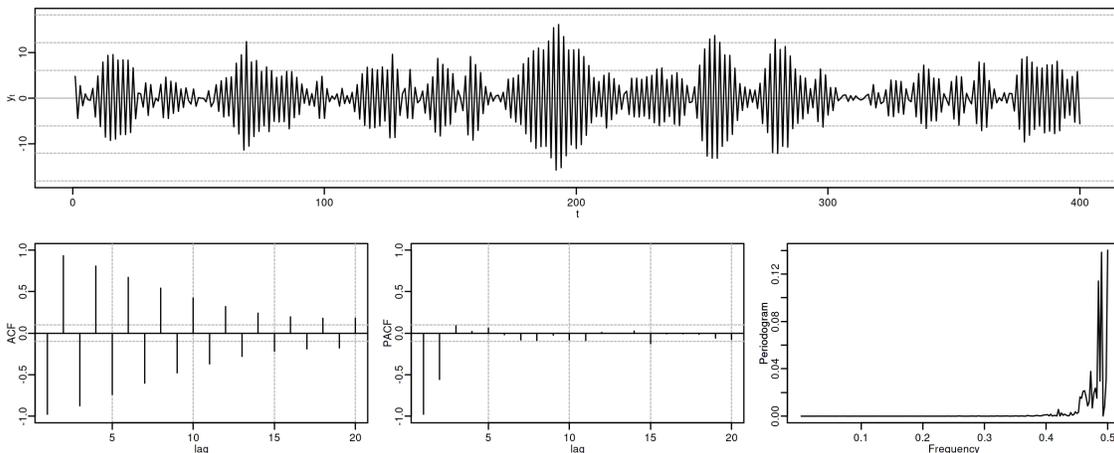
$$\phi(z) = 1 + 1,6z + 0,64z^2 \Rightarrow (1 + 1,6B + ,64B^2)X_t = U_t \quad (\text{raíces reales: -, -})$$



```
roots(ar2azul)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	-1.25	-1.110223e-16	1.25	0.5	2	2

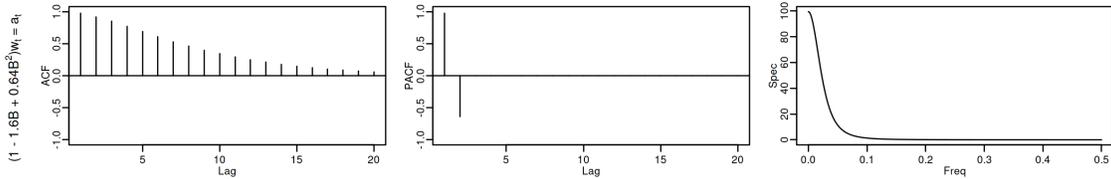
```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2azul, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



4.8.8. AR(2) con dos raíces reales y positivas

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 2, repr.plot.res = 200)
ar2rojo <- um(ar = "(1 - 1.6B + .64B^2)")
display(list(ar2rojo), lag.max = 20, byrow = TRUE)
```

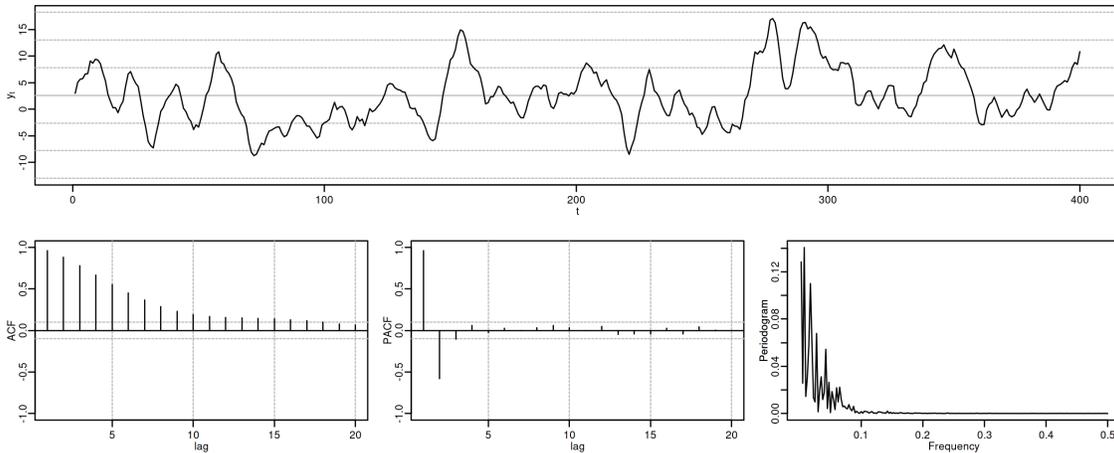
$$\phi(z) = 1 - 1,6z + ,64z^2 \Rightarrow (1 - 1,6B + ,64B^2)X_t = U_t \quad (\text{raíces reales: } +, +)$$



```
roots(ar2rojo)
```

	Real	Imaginary	Modulus	Frequency	Period	Mult.
1.	1.25	-2.775558e-16	1.25	0	Inf	2

```
options(repr.plot.width = 12, repr.plot.height = 5, repr.plot.res = 200)
ide(sim(ar2rojo, n = 400), lag.max = 20, graphs = c("plot", "acf", "pacf", "pgram"))
```



5. (Resumen) características de procesos MA(q)

Siempre estacionario.

Para ser invertible raíces θ fuera del círculo unidad ($\theta^{-D} = \theta^{-1} \in \ell^1$)

Tipos de representación del proceso

Como suma ponderada finita (número finito de parámetros)

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta} * \mathbf{U} \Rightarrow X_t = \boldsymbol{\theta}(B)U_t$$

Como suma ponderada infinita (solo existe si es invertible):

$$\frac{1}{\theta} * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\theta}(\mathbf{B})X_t = U_t$$

Comportamiento de las funciones asociadas a los segundo momentos

ACF (ρ): Grado (q) y cogrado ($-q$)

PACF (π): Grado (∞) y cogrado ($-\infty$): Combinación de exponenciales y/o sinusoidales amortiguadas.

Densidad espectral proporcional al inverso de la densidad espectral de $\theta * \mathbf{X} = \mathbf{U}$

6. (Resumen) características de procesos AR(p)

Siempre invertible.

Para ser estacionario raíces de ϕ fuera del círculo unidad ($\phi^{-p} = \phi^{-1} \in \ell^1$)

Tipos de representación del proceso

Como suma ponderada finita (número finito de parámetros)

$$\phi * \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{B})X_t = U_t$$

Como suma ponderada infinita (solo si es estacionario)

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\phi} * \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad X_t = \frac{1}{\phi}(\mathbf{B})U_t$$

Comportamiento de las funciones asociadas a los segundo momentos

ACF (ρ): Grado (∞) y cogrado ($-\infty$): Combinación de exponenciales y/o sinusoidales amortiguadas.

PACF (π): Grado (p) y cogrado ($-p$)

Densidad espectral proporcional al inverso de la densidad espectral de $\mathbf{X} = \phi * \mathbf{U}$

7. Nota final

Se puede demostrar que

- si un proceso tiene una ACF ρ con cogrado $-q$ y grado q , es un proceso MA(q)
- si un proceso tiene una PACF π con cogrado $-p$ y grado p , es un proceso AR(p)

Véase *Pourahmadi M. (2001)*.

Consecuentemente, que la ACF o la PACF se corten “bruscamente” nos indica que el modelo es AR o MA (además de su grado).

Desgraciadamente para los modelos ARMA (qué veremos más adelante) tanto la ACF como la PACF tienen infinitos términos no nulos, por lo que su identificación no es tan sencilla.

	ACF finita	ACF persistente
PACF finita	<u>Ruido blanco</u> : retardos conjuntamente NO significativos	<u>AR</u> : orden indicado por la PACF
PACF persistente	<u>MA</u> : orden indicado por la ACF	<u>ARMA</u>