Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

04/04/2024

Esquema de la Lección 6

- Introducción a los espacios y subespacios vectoriales

¿Que operaciones hemos empleado con vectores?

- suma de vectores: $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$
- producto por un escalar: $\lambda\boldsymbol{v}$

3 Espacio vectorial: definición

Un *espacio vectorial* es un conjunto $\mathcal{V}$ junto con dos operaciones

Suma ($\vec{x} + \vec{y}$): $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

Asocia a cada par $\vec{x}$, $\vec{y}$ otro elemento de $\mathcal{V}$ llamado $\vec{x} + \vec{y}$

Producto por escalares ($\alpha\vec{x}$): $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

Asocia a cada par α, $\vec{x}$ otro elemento de $\mathcal{V}$ llamado $\alpha\vec{x}$

que verifican:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$
- Existe un único $\vec{0}$ tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- Para cada $\vec{x}$ hay un único $-\vec{x}$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
- $(\alpha \cdot \beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
- $1\vec{x} = \vec{x}$

4 Espacios Vectoriales: resumen

- Un espacio vectorial es un conjunto de objetos matemáticos (pueden ser números, listas de números, matrices, funciones, etc. . .)
- y dos operaciones:
  - *suma de vectores*
  - *producto de un escalar por un vector.*

  que deben verificar las ocho propiedades indicadas.
- Los elementos de un espacio vectorial se denominan *vectores*.

Para nosotros los escalares serán siempre los números reales ($\mathbb{R}$).

5 Ejemplos: $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$: conjunto de pares de números reales

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \pi \\ e \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1^{\underline{a}} \text{ comp.} \\ 2^{\underline{a}} \text{ comp} \end{pmatrix}$$

Es el plano xy (Todos los vectores bi-dimensionales) dibujo

6 Más ejemplos

$\mathbb{R}^3$: todas las ternas de números reales

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^1$: listas con un solo número real: $(0,)$ $(\pi,)$ $(a,)$ $(7,)$

$\mathbb{R}^n$: n-tuplas de números reales

7 Subespacios vectoriales

Un subespacio $\mathcal{W}$ del espacio vectorial $\mathcal{V}$

es un subconjunto no vacío de $\mathcal{V}$ (con las operaciones de $\mathcal{V}$) tal

que para cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$, y cualesquiera escalares c y d:

- $(\vec{v}+\vec{w})$ está en $\mathcal{W}$
- $(c\cdot\vec{v})$ también está $\mathcal{W}$

Cualquier combinación lineal $(c\cdot\vec{v}+d\cdot\vec{w})$ está en $\mathcal{W}$

$\mathcal{W}\subset\mathcal{V}$ es un subespacio si es cerrado para ambas operaciones.

Un subespacio de $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial contenido dentro de $\mathcal{V}$.

8 Ejemplos

¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son subespacios?

- Primer cuadrante del plano
- Recta en el plano que contiene el cero
- Recta en el plano que no pasa por el origen
- $\{\mathbf{0}\}$: conjunto con únicamente por el vector nulo $\mathbf{0}$

Todo subespacio debe contener el vector “cero”

9 Listado de subespacios de $\mathbb{R}^2$

1. Todo (el plano) $\mathbb{R}^2$
2.
3.

¿y para $\mathbb{R}^3$? gráfico 3D

10 Unión e Intersección de subespacios

Sean dos subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$

- $\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$: todos los vectores que están en $\mathcal{S}$, en $\mathcal{T}$, o en ambos

  ¿Es un subespacio?

- $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$: los vectores que están simultáneamente en $\mathcal{S}$, y en $\mathcal{T}$

  ¿Es un subespacio? (demo?)

Problemas de la Lección 6

(L-6) Problema 1.

(a) Encuentre un subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ ($W \subseteq \mathbb{R}^2$) cerrado para la suma, (si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$ entonces $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W$), pero no para el producto por un escalar ($c\boldsymbol{v}$ no necesariamente pertenece a W).
(b) Encuentre un subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ ($W \subseteq \mathbb{R}^2$) cerrado para el producto (si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$, entonces $c\boldsymbol{v} \in W$), pero no para la suma ($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ no necesariamente pertenece a W).

(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-6) Problema 2. Considere el plano $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son también subespacios vectoriales y cuales no?

(a) $\{(a,\ a^2,) \mid a \in \mathbb{R}\}$
(b) $\{(b,\ 0,) \mid b \in \mathbb{R}\}$
(c) $\{(0,\ c,) \mid c \in \mathbb{R}\}$
(d) $\{(m,\ n,) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros.
(e) $\{(d,\ e,) \mid d, e \in \mathbb{R},\ d \cdot e = 0\}$
(f) $\{(f,\ f,) \mid f \in \mathbb{R}\}$

(L-6) Problema 3. ¿Por qué $\mathbb{R}^2$ no es un sub-espacio de $\mathbb{R}^3$?
(Strang, 2007, ejercicio 31 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-6) Problema 4. Sea P el plano en $\mathbb{R}^3$ formado por el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación

$$x - y - z = 3.$$

Encuentre dos vectores en P y demuestre que su suma no está en P.

(L-6) Problema 5. Demuestre que para $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, el conjunto de soluciones $\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ **no es** un subespacio.

(L-6) Problema 6. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de matrices de orden 2. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix};$$

(a) Diga un subespacio que contenga $\mathbf{A}$ pero no $\mathbf{B}$.
(b) Diga un subespacio que contenga $\mathbf{B}$ pero no $\mathbf{A}$.
(c) ¿Hay algún subespacio que contenga a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ pero no contenga a la matriz identidad $\underset{n\times n}{\mathbf{I}}$?

(L-6) Problema 7. Considere el conjunto de matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ como un espacio vectorial. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios?

(a) El conjunto de matrices simétricas, $\mathcal{S} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid {}_{j|}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{|j}\}$
(b) El conjunto de matrices NO simétricas, $\mathcal{NS} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathbf{A}^\intercal \neq \mathbf{A}\}$
(c) El conjunto de matrices *anti-simétricas* $\mathcal{AS} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathbf{A}^\intercal = -\mathbf{A}\}$

(L-6) Problema 8.

(a) La intersección de dos planos que pasan por $(0,0,0,)$ probablemente es una ____________, aunque puede ser un ____________.
(b) La intersección de un plano que pasa por $(0,0,0,)$ con una recta que pasa por $(0,0,0,)$ probablemente es ____________, aunque puede ser ____________.
(c) Si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son subespacios de $\mathbb{R}^5$, su intersección $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ (vectores en ambos subespacios) es un subespacio de $\mathbb{R}^5$. Compruebe los requerimientos sobre $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ y $c\boldsymbol{x}$.

(Strang, 2007, ejercicio 18 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-6) Problema 9. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son realmente subespacios?

(a) el plano de vectores $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3,)$ cuya primera componente es $b_1 = 0$.
(b) el plano de vectores $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3,)$ cuya primera componente es $b_1 = 1$.
(c) Los vectores $\boldsymbol{b}$ con $b_2 b_3 = 0$ (esta es la unión de dos subespacios: el plano de vectores con segundas componentes nulas $b_2 = 0$ y el plano de vectores con terceras componentes nulas $b_3 = 0$).
(d) Únicamente el vector $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.
(e) Todas las combinaciones de dos vectores dados $(1,\ 1,\ 0,)$ y $(2,\ 0,\ 1,)$.
(f) El plano de vectores $(b_1,\ b_2,\ b_3,)$ que satisface $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 2.1.)

Uno más... un poco más difícil

(L-6) Problema 10. Para que un conjunto tenga estructura de espacio vectorial, se requiere que la suma y la multiplicación por un escalar cumplan las ocho siguientes condiciones; donde $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son vectores, y a y b escalares

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.
2. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$.
3. Hay un único vector $\boldsymbol{0}$ ("vector cero") tal que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x}$.
4. Para cada $\boldsymbol{x}$, hay un único vector $-\boldsymbol{x}$ ("el opuesto") tal que $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.
5. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
6. $(a \cdot b)\boldsymbol{x} = a(b\boldsymbol{x})$.
7. $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$.
8. $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$.

(a) Suponga que la suma en $\mathbb{R}^2$ añade un 1 de más a cada componente, de modo que $(3,1,) + (5,0,) = (9,2,)$ en lugar de $(8,1,)$. Si la multiplicación por un escalar permanece sin cambio, ¿qué reglas se rompen?
(b) Demuestre que el conjunto de todos los números reales positivos con la siguiente nueva definición de suma y producto por un escalar es espacio vectorial:

• $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = xy$ • $\boldsymbol{x} = x^c$

¿Cuál es el vector $\boldsymbol{0}$ en este caso?:
(c) Suponga que $(x_1,\ x_2,) + (y_1,\ y_2,)$ se define cómo $\Big((x_1 + y_2),\ (x_2 + y_1),\Big)$; con el producto usual $c\boldsymbol{x} = (cx_1,\ cx_2,)$. ¿Cuáles de las ocho reglas no se cumplen?

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 2.1.)

1 Esquema de la **Lección 7**

Esquema de la Lección 7

- Espacio Nulo de **A**: resolviendo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

Cálculo del Espacio Nulo $(\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0)$
mediante eliminación **por columnas**

- Forma (pre)escalonada por columnas
- Variables pivote (*o endógenas*) y variables libres (*o exógenas*)
- Soluciones especiales

2 Subespacios asociados a matrices: espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathcal{N}(\mathbf{A}) \text{ es el conjunto de soluciones } \boldsymbol{x} \text{ del sistema } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.}$

$\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es subconjunto de ¿$\mathbb{R}^?$?
Diga algunas soluciones. Dígalas todas

¿Qué aspecto (dimensión) tiene $\mathcal{N}(\mathbf{A})$? (dibujo)

3 ¿Es el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ un subespacio?

Debemos comprobar que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ y si $\mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, entonces

El conjunto de soluciones $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es subespacio

4 Conjunto de soluciones del sistema no homogéneo

Cambiemos el lado derecho (sistema NO homogéneo)

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el conjunto de soluciones?

¿Forman las soluciones un subespacio?
¿Pertenece $\mathbf{0}$ al conjunto de soluciones?

5 Cálculo del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

- ¿Hay columnas que sean combinación lineal del resto?
- La eliminación nos lo dirá...

6 ¿Qué columnas son combinación lineal del resto?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Entonces $\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow$

y $\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow$

7 Cálculo del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: eliminación y "soluciones especiales"

$$\boxed{\mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right)_{|j} = \left(\mathbf{A}_{\tau_1\cdots\tau_k}\right)_{|j}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 1 & -2 & -2 & -2 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ 2 & \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} \\ 3 & \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} \\ \hline 1 & -2 & -2 & 2 \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & -2 \\ & 0 & & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \hline \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Si $\mathbf{A}\left(\mathbf{E}_{|j}\right) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{E}_{|j}$ es solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

El número de pivotes de $\mathbf{K}$ es el *rango* de una matriz

8 Cálculo del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: solución general

Solución general: $\mathcal{N}(\mathbf{A})$

¿Cuál es el conjunto de TODAS las soluciones?

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \qquad \right\}$
- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \qquad \right\}$

¿Cuántas soluciones especiales?

¿Cuántas columnas nulas tengo?

9 ¿Por qué no hay más soluciones?

Sea $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ y $\mathbf{AE}=\mathbf{K}$ $\qquad$ ($\mathbf{E}=\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}$ rango completo)

¿Es $\boldsymbol{x}$ combinación de las col. de $\mathbf{E}$? $\qquad$ $(\boldsymbol{x}=\mathbf{E}\boldsymbol{y})$

Tomando $\boldsymbol{y}=\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{x}$, tenemos que $\boldsymbol{x}=\mathbf{E}\boldsymbol{y}$

¿Necesitamos todas las columnas de $\mathbf{E}$ para generar $\boldsymbol{x}$?

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{c}\mathbf{K}\\\hline\mathbf{E}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc}* & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & 0 & 0\\\hline \mathbf{E}_{|1} & \mathbf{E}_{|2} & \mathbf{E}_{|3} & \mathbf{E}_{|4} & \mathbf{E}_{|5}\end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{A}\mathbf{E}\boldsymbol{y}=\mathbf{K}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}\;\Rightarrow\;(y_j=?\text{ para columnas pivote})$$

$\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\boldsymbol{x}$ es combinación de las *soluciones especiales*

10 Calculo de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$: Algoritmo completo para resolver $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

Algoritmo para resolver $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=0$

1. Encuentre una forma pre-escalonada: $\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]\xrightarrow{\tau_1\cdots\tau_k}\left[\begin{array}{c}\mathbf{K}\\\hline\mathbf{E}\end{array}\right]$
2. Si hay *soluciones especiales:*
   - Solución completa

     $\mathcal{N}(\mathbf{A})=\{$combinaciones lineales de las soluciones especiales $\}$
3. Si no hay *soluciones especiales* (si $\mathbf{K}$ no tiene columnas nulas)
   - Solución completa:

     $\mathcal{N}(\mathbf{A})=\{\mathbf{0}\}$

11 Otro ejemplo: $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\intercal})$

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}^{\intercal}\\\hline\mathbf{I}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}1&2&3\\2&4&6\\2&6&8\\2&8&10\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ {[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}\\ {[(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}}\qquad\qquad=\left[\begin{array}{c}\mathbf{L}\\\hline\mathbf{E}\end{array}\right]$$

¿Cuántos pivotes?

¿Cuántas columnas libres? $\qquad$ ¿Cuántas soluciones especiales?

¿conjunto de soluciones a $\mathbf{A}^{\intercal}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$?

Problemas de la Lección 7

(L-7) PROBLEMA 1. Calcule una forma pre-escalonada para obtener los rangos de las siguientes matrices. Describa el espacio nulo con ecuaciones paramétricas, e indique su forma geométrica..

(a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&5\\2&3&1&4\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&3&4\\2&-1&-3\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&1\\-2&-1&4\end{bmatrix}$.

(d) $\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\-1&-3\end{bmatrix}$.

(L-7) PROBLEMA 2. Describa el espacio nulo de las siguientes matrices con ecuaciones paramétricas, e indique su forma geométrica.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$.

(L-7) PROBLEMA 3. Reduzca $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a una forma pre-escalonada para encontrar sus rangos. Encuentre las soluciones especiales de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Describa todas las soluciones.
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-7) PROBLEMA 4. Encuentre una forma pre-escalonada y el rango de las siguientes matrices (encuentre además la solución de los sistemas homogéneos $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ en cada caso):

(a) La matriz de 3 por 4 con todos sus componentes iguales a uno.
(b) La matriz de 4 por 4 con $a_{ij} = (-1)^{ij}$.
(c) La matriz de 3 por 4 con $a_{ij} = (-1)^{j}$.

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-7) PROBLEMA 5. La matriz $\mathbf{A}$ tiene dos soluciones especiales:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Describa todas las posibilidades para el número de columnas de $\mathbf{A}$.
(b) Describa todas las posibilidades para el número de filas de $\mathbf{A}$.
(c) Describa todas las posibilidades para el rango de $\mathbf{A}$.

Explique sus respuestas.
(*MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall, 2008*)

(L-7) PROBLEMA 6. Suponga que $\mathbf{A}$ tiene como forma escalonada reducida por columnas $\mathbf{R}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \clubsuit \\ 2 & a & \clubsuit \\ 1 & 1 & \clubsuit \\ b & 8 & \clubsuit \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Qué puede decir sobre la tercera columna de $\mathbf{A}$?
(b) ¿Qué números son a y b?
(c) Describa el espacio nulo de $\mathbf{A}$ si: $\mathbf{A} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$.

(L-7) PROBLEMA 7. Encuentre la forma escalonada reducida por columnas de las siguientes matrices

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(L-7) PROBLEMA 8. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Sabiendo que $\mathbf{A}$ es invertible, y sin realizar ningún cálculo ¿puede decir cuál es su forma *escalonada reducida*?
(b) Calcule la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

(L-7) PROBLEMA 9. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Sabiendo que $\mathbf{A}$ es invertible, y sin realizar ningún cálculo ¿puede decir cuál es su forma *escalonada reducida*?
(b) Calcule la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

1 Esquema de la **Lección 8**

Esquema de la Lección 8

- El espacio columna de $\mathbf{A}$: resolviendo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- Estudiaremos solución de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, ...si existe.
  - ¿es $\boldsymbol{x}$ único?
  - ¿o hay toda una familia de soluciones?

$$\left\{ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_p) = \boldsymbol{b} \\ \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

2 Subespacios asociados a matrices: espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Sus columnas son vectores de

¿Qué debemos añadir al conjunto de columnas para generar un subespacio?

Llamamos a este conjunto *espacio columna de* $\mathbf{A}$*:* $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Así que $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es un subespacio de

3 Subespacios asociados a matrices: espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es un subespacio de

¿Qué hay en $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?

¿Está todo el espacio $\mathbb{R}^3$ incluido en $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?

Para responder volvamos a los sistemas de ecuaciones...

4 Conexión entre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

¿Tiene $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ solución para cualquier $\boldsymbol{b}$? (la cuestión de hoy)

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Para qué vectores b el sistema es resoluble?

¿Se puede encontrar una solución para $\boldsymbol{b}_1 = (1, \; 2, \; 3,)$? ¿y para $\boldsymbol{b}_2 = (2, \; 6, \; 8,)$? ¿y para $\boldsymbol{b}_3 = (0, \; 0, \; 0,)$? ¿y para $\boldsymbol{b}_4 = (3, \; 6, \; 9,)$? ¿y para $\boldsymbol{b}_5 = (1, \; 0, \; 0,)$?

5 Conexión entre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿podemos desechar alguna columna manteniendo el mismo $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?

y la eliminación mostrará qué columnas son combinación lineal de las que están a su izquierda.

Pero ¿cómo afecta la eliminación a los espacios $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ y $\mathcal{C}(\mathbf{A})$?

6 En el próximo ejemplo usaremos la forma escalonada reducida

Eliminación Gauss-Jordan: pivotes iguales a 1, con ceros a la izda.

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{4}] \\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(\frac{1}{2})\mathbf{2}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{E} \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)_{|j} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)_{|j} \\ \left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1}}\right)_{|j} = \mathbf{A}_{|j} \end{array}} \implies \mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right).$$

Sin embargo, en general $\quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \mathcal{N}\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right).$

7 Ejemplo de sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \ \ 8x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = b_3 \end{cases}$$

¿Qué descubrirá la eliminación respecto a las columnas?

¿Qué debe cumplir $(b_1, b_2, b_3,)$ para que exista solución?

Si $b_1 = 1$ y $b_2 = 5$, ¿cuánto debe valer b_3 para que exista solución? ¡Veamos!

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} - 1\boldsymbol{b} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\ \mathbf{A} \mid -\boldsymbol{b}\ \right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

8 Sistema de ecuaciones lineales: condición de resolubilidad

$$\left[\ \mathbf{A} \mid -\boldsymbol{b}\ \right](\boldsymbol{x}, \quad 1,) = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -b_3 \\ \hline 3 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(b_1)\mathbf{1}+\mathbf{5}] \\ [(b_2)\mathbf{2}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b_1+b_2-b_3 \\ \hline 3 & -1 & -2 & 2 & 3b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & -b_1+\frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p \\ \hline & 1 \end{array}\right]$$

Condición para que el sistema sea resoluble :

Si $b_1 = 1$ y $b_2 = 5$ entonces $b_3 =$

Si $\boldsymbol{b} = (1, \quad 5, \quad 6,)$ ¿cómo es la última columna?

Resuelva para $\boldsymbol{b} = (2, \quad 2, \quad 4,)$

$\boxed{9}$ Algoritmo de resolución del sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & -2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{existe } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{10}$ Algoritmo de resolución completa (o general) del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Aplicamos la eliminacion para resolver $\left[\, \mathbf{A} \;\middle|\; -\boldsymbol{b} \,\right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline 0\cdots 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminación}} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \boldsymbol{c} \\ \hline \mathbf{E} & \boldsymbol{x}_p \\ \hline 0\cdots 0 & 1 \end{array}\right], \quad \text{donde} \quad \mathbf{K} = \mathbf{AE}.$$

- Si $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$, el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ NO tiene solución.
- Si $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ y el conjunto de soluciones es

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \text{existe } \boldsymbol{y} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{y} \right\}.$$

Si $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\boldsymbol{x}_p$ es la única solución.

$\boxed{11}$ Teorema de Rouché-Frobenius

Sist. $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$	$r = m = n$	$r = n < m$	$r = m < n$	$r < m;\quad r < n$
soluciones				

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \text{-}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & 0 & 0 & -b_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & :\mathbf{1} & 0\mathbf{1} & : -b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0: & 0: & \cdots & 0: & \cdots & 0:\mathbf{1} & :\mathbf{1}0 & -b_m \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

donde $\mathbf{A}$ (de orden $m \times n$) tiene rango r; y donde "$\mathbf{1}$" son pivotes.

Problemas de la Lección 8

(L-8) PROBLEMA 1. ¿Cuáles de las siguientes reglas proporcionan una definición correcta del rango de $\mathbf{A}$?

(a) El número de columnas diferentes de cero en $\mathbf{R}$ (forma reducida por columnas).
(b) El número de columnas menos el número total de filas
(c) El número de columnas menos el número de columnas libres
(d) El número de unos en $\mathbf{R}$.

(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 2. Encuentre la solución completa (o *solución general*) a

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 3.4.)

(L-8) PROBLEMA 3. Encuentre la solución completa (o *solución general*) a

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1 & 2 & 9\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

(L-8) PROBLEMA 4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1+x_3+x_5 &=1\\ x_2+x_4 &=1\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &=2\\ x_3+x_4 &=2\end{aligned}$$

(L-8) PROBLEMA 5.
Sean

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 6\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}.$$

(a) Encuentre la forma escalonada por columnas de **A**
(b) Encuentre las variables libres
(c) Encuentre las soluciones especiales:
(d) $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ es consistente (tiene solución) cuando la segunda componente de $\boldsymbol{b}$ satisface $b_2 =$ ____.
(e) Encuentre la solución completa del sistema lineal de ecuaciones cuando b_2 satisface la condición.

(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 6. Calcule lo mismo que en el problema anterior para encontrar la solución completa de $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 0\\ 3 & 6\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}.$$

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 7. Describa el conjunto de vectores $\boldsymbol{b}$ que hacen el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ resoluble (el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$) para el caso

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

encontrando las restricciones necesarias sobre $\boldsymbol{b}$ tras realizar el procedimiento de eliminación. ¿Cual es el rango de **A**? Indique un posible lado derecho y la una solución particular al sistema. Describa también el espacio nulo.
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 8. Suponga una compañía que pinta coches, trenes y aviones:
Cada coche supone 10 horas de trabajo de preparación, 30 de pintado y 12 de retoques finales.
Cada tren supone 20 horas de trabajo de preparación, 75 de pintado y 36 de retoques finales.
Cada avión supone 40 horas de trabajo de preparación, 135 de pintado y 64 de retoques finales.
Dada la plantilla de la empresa, decide dedicar los siguientes recursos cada semana, 760 horas de trabajo a la preparación, 2595 al pintado, y 1224 a retoques finales. ¿Cuantos aviones, trenes y coches puede pintar la empresa a la semana?.

(L-8) PROBLEMA 9. Para el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ dado por

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 10\\ 3 & 1 & c\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\14\\20\end{pmatrix}$$

(a) Encuentre el valor de c que hace a la matriz **A** no invertible. Use dicho valor en los apartados siguientes.
(b) Encuentre la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.
(c) Describa el sistema de ecuaciones mediante la visión por columnas (columnas de **A** y el vector $\boldsymbol{b}$), o bien mediante la visión por filas (las tres ecuaciones del sistema).

(L-8) PROBLEMA 10. Construya (si es que es posible) una matriz cuyo espacio columna contenga a $(1,1,5)$ y a $(0,3,1)$ y cuyo espacio nulo conste de todas las combinaciones de $(1,1,2)$.
(Strang, 2007, ejercicio 62 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 11. ¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ los siguientes sistemas tienen solución?

(a) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 24 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-8) PROBLEMA 12. ¿Cuáles deben ser las condiciones sobre b_1 y b_2 (en caso de haber alguna) para que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga solución?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre dos vectores en el espacio nulo de $\mathbf{A}$; así como la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 13. Sea la matriz

$$\underset{3\times 4}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Sin realizar la multiplicación, diga una base de $\mathcal{N}(\mathbf{B})$, y el rango de $\mathbf{B}$. Explique su respuesta.

(b) ¿Cuál es la solución completa a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(L-8) PROBLEMA 14. ¿Para qué miembros derechos $\boldsymbol{b}$ los siguientes sistemas son resolubles? Dicho de otra forma ¿qué condición debe cumplir $\boldsymbol{b}$ para que sea solución del sistema?

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Cubre el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ todo el espacio $\mathbb{R}^3$ o sólo un subespacio? Si es un subespacio, ¿es un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿es una recta, o es un punto?

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Cubre el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ todo $\mathbb{R}^3$ o sólo un subespacio? Si es un subespacio, ¿es un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿es una recta, o es un punto? *Basado en (Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 2.1.)*

(L-8) PROBLEMA 15. La solución completa a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ es:

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \qquad \text{¿Cómo es } \mathbf{A}?$$

(L-8) PROBLEMA 16. Ana, Belén, y Carlos deciden que no les gusta el color de las paredes del aula donde estudian Matemáticas II. Ana compra un bote de pintura roja, seis de pintura azul, y un bote de pintura verde. La factura es de 44 euros; Belén compra dos botes azules y tres verdes la factura es de 24 euros; y por último Carlos compra un bote rojo y cinco azules por un importe de 33 euros.

(a) ¿Cuanto vale cada bote de pintura?
(b) ¿Qué no tiene sentido en la respuesta a la pregunta anterior?
(c) Cuando Ana, Belén, y Carlos comparan las facturas se dan cuenta de que a uno de ellos le han cobrado 4 euros de menos. ¿A quién?
(d) Tras intentar dar respuesta a la pregunta anterior, se habrá dado cuenta de que es un tanto "trabajoso" dar con el resultado. Intente lo siguiente: genere la matriz ampliada $\left[\mathbf{A}|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}\right]$ donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones, y $\boldsymbol{a}$ es el vector de precios suponiendo que a Ana deberían haberle cobrado 4 euros más (es decir 48 en lugar de 44), $\boldsymbol{b}$ el vector de precios suponiendo que sólo a Belén deberían haberle cobrado 4 euros más, y $\boldsymbol{c}$ lo mismo para Carlos. Calcule la forma escalonada reducida de la matriz ampliada. A la vista de lo obtenido ¿cuanto vale cada bote de pintura? y ¿a quien han cobrado 4 euros de menos?

(L-8) PROBLEMA 17. Suponga que el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es consistente (que tiene solución), donde $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ y $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$. **Demuestre** las siguientes afirmaciones:

(a) $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$.
(b) Si $\boldsymbol{x}_0$ es una solución particular del sistema, entonces cualquier vector de la forma $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}$, donde $\boldsymbol{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, es también solución del sistema.
(c) Demuestre que si hay dependencia lineal entre las columnas de $\mathbf{A}$, entonces hay más de una solución.

(L-8) PROBLEMA 18. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de eliminación Gaussiano.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & - & z & = & -2 \\ & & 4y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$

(L-8) PROBLEMA 19. Escriba los siguientes problemas clásicos en forma matricial 2 por 2 para $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, y resuélvalos:

(a) X es dos veces más viejo que Y, y la suma de la edad de ambos es igual a 39.
(b) Los puntos $(x, y,) = (2, 5,)$ y $(x, y,) = (3, 7,)$ están en la recta $y = mx + c$. Encuentre los valores de m y de c.

(Strang, 2007, ejercicio 32 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-8) PROBLEMA 20. La parábola $y = a + bx + cx^2$ pasa por los puntos $(x, y,) = (1, 4,),\ (2, 8,)$ y $(3, 14,)$. Encuentre y resuelva una ecuación matricial para las incógnitas $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a, & b, & c, \end{pmatrix}$.
(Strang, 2007, ejercicio 33 del conjunto de problemas 1.4.)

(L-8) PROBLEMA 21. Explique por qué el sistema

$$\begin{cases} u & + & v & + & w & = & 2 \\ u & + & 2v & + & 3w & = & 1 \\ & & v & + & 2w & = & 0 \end{cases}$$

es singular y no tiene solución.
¿Por qué valor debe sustituirse el último cero del lado derecho para que el sistema sea resoluble? Indique una de las soluciones al sistema.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 1.2.)

(L-8) PROBLEMA 22. Escoja un coeficiente b que haga singular este sistema. Luego, escoja un valor para g que permita resolver el sistema. Encuentre dos soluciones del caso singular

$$\begin{cases} 2x + by & = 16 \\ 4x + 8y & = g \end{cases}$$

Basado en (Strang, 2003, ejercicio 6 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 23. Resuelva el siguiente sistema para encontrar una combinación de las columnas que sea igual a $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & b_3, \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} u - v + w &= b_1 \\ v + w &= b_2 \\ w &= b_3. \end{aligned}$$

Verifique que su respuesta es correcta multiplicando la matriz de coeficientes del sistema por su vector solución para obtener $\boldsymbol{b}$.
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 1.2.)

(L-8) PROBLEMA 24. Encuentre las siguiente matrices **A** y **B**, o bien, explique por qué no es posible encontrar tales matrices.

(a) La única solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) La única solución a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(Strang, 2007, ejercicio 49 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 25. La solución completa de $\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Encuentre **A**.
(Strang, 2007, ejercicio 50 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 26. Suponga que la columna quinta de **L** no tiene pivote. Entonces x_5 es una variable ____________ . En este caso el vector cero (es) (no es) la única solución al sistema homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Además, si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene una solución, entonces tiene ____________ soluciones.
(Strang, 2007, ejercicio 40 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-8) PROBLEMA 27. Considere un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$; donde la matriz **A** tiene tres filas y cuatro columnas.

(a) Un sistema como este ¿tiene siempre solución? Si no es así, escriba un ejemplo de sistema que no tenga solución.
(b) ¿Es posible que el sistema tenga una única solución? Si es así, proporcione un ejemplo.
(c) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre **A** y $\boldsymbol{b}$ que garantice que el sistema tiene al menos una solución.
(d) Formule, si es posible, una condición necesaria y suficiente sobre **A** que garantice que el sistema tiene al menos una solución para cualquier vector $\boldsymbol{b}$.

(L-8) PROBLEMA 28. Mediante eliminación sobre la matriz **A** de orden 4×7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & -7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hemos obtenido la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{\tau_1 \cdots \tau_k}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{donde } \mathbf{I}_{\tau_1 \cdots \tau_k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Cuál es el rango de **A**? Resuelva el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(b) Exprese, si es posible, la solución en función de las variables x_2, x_4 y x_6.
(c) Encuentre, si es posible, un $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución.
(d) Proporcione un vector $\boldsymbol{b}$ tal que el vector $\boldsymbol{x} = \mathbf{I}_{|1}$ sea solución al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(e) Si $\boldsymbol{b}$ es la suma de todas las columnas de **A**. Escriba, si es posible, la solución completa del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Versión modificada de MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004

(L-8) PROBLEMA 29. $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ es una matriz de rango r. Suponga que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución para algunos vectores $\boldsymbol{b}$, pero infinitas soluciones para otros vectores $\boldsymbol{b}$.

(a) Decida si el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ contiene sólo el vector cero, y explique porqué.
(b) Decida si el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ es todo $\mathbb{R}^m$ y explique porqué.
(c) Para esta matriz $\mathbf{A}$, encuentre las relaciones entre los números r, m; y entre r y n.

(d) ¿Puede existir un lado derecho $\boldsymbol{b}$ para el que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga una y sólo una solución? ¿Porqué es posible o porqué no?

(L-8) PROBLEMA 30. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 9 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre un conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ y describa con él el espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(b) Encuentre la solución completa— es decir todas las soluciones (x_1, x_2, x_3, x_4) — de

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Cuando una matriz $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ tiene rango $r = m$ ¿para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ puede resolverse? ¿Cuantas soluciones especiales tiene $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (dimensión del espacio nulo)?

(L-8) PROBLEMA 31. Considere el sistema de ecuaciones,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & cz & = & 2 \end{array} \right.$$

¿Para qué valores de c este sistema no tiene solución? ¿sólo una solución? ¿e infinitas soluciones?

(L-8) PROBLEMA 32. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + 2z & = 1 \\ 2x - 3y + mz & = 3 \\ -x + 2y + 3z & = 2m \end{cases}$$

(a) Demuestre que tiene solución para cualquier valor del parámetro m.
(b) Halle la solución del sistema anterior si $m = -1$.
(c) ¿Corresponde la solución obtenida a las ecuaciones de una recta en $\mathbb{R}^3$?¿Existe algún valor del parámetro m para el que la solución del sistema anterior sea un plano en $\mathbb{R}^3$? ¿Y un punto en $\mathbb{R}^3$?
(d) Halle la solución del sistema anterior cuando $m = 1$.

(L-8) PROBLEMA 33. ¿Cuáles de las siguientes descripciones son correctas? Las soluciones $\boldsymbol{x}$ del sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

constituyen:

(a) Un plano
(b) Una recta
(c) Un punto
(d) Un subespacio
(e) El espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(f) El espacio columna de $\mathbf{A}$.

(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-8) PROBLEMA 34. Considere la ecuación $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

¿Para que vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema tiene solución?
Basado en *MIT Course 18.06 Quiz 1, Fall 2008*

(L-8) PROBLEMA 35. En un teatro de barrio, tres grupos están haciendo cola. Hay cuatro tipos de tarifas; tercera edad (t), adulto (a), infantil (i) y tarifa con descuento para empleados del teatro y familiares (d).
El primer grupo compra tres entradas de adulto y tres infantiles por 39 euros.
El segundo grupo compra tres entradas de adulto y cuatro de la tercera edad por 44 euros
El tercer grupo compra dos entradas con descuento y dos entradas infantiles por 22 euros

(a) Si intenta descubrir el precio de cada entrada ¿cuantas soluciones puede encontrar? Ninguna, una, o infinitas
(b) Si las entradas de la tercera edad valen lo mismo que las infantiles. ¿Cuánto vale cada tipo de entrada?

(L-8) PROBLEMA 36. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -5 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 = 7 \end{cases}$$

(a) (0.5 pts) ¿Cuál es el rango de la matriz de coeficientes?
(b) (1.5 pts) Resuelva el sistema de ecuaciones
(c) (0.5 pts) Describa la forma geométrica del conjunto de vectores solución a este sistema de ecuaciones (considerando el conjunto como un subconjunto de $\mathbb{R}^4$).

(L-8) PROBLEMA 37. Considere el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5^{pts}) Encuentre los valores del parámetro a de manera que la solución del sistema sea una recta.
(b) (0.5^{pts}) ¿Para qué valores de a el conjunto de soluciones es un plano?

(L-8) PROBLEMA 38. Encuentre la solución completa del sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 6 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

L-6 L-7 L-8 L-9 L-10 L-R

(L-8) PROBLEMA 39. Sea la matriz $\underset{3\times 4}{\mathbf{A}}$ y el vector columna $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre todas la soluciones al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (si es que existen soluciones). Describa el conjunto de soluciones geométricamente. ¿Es dicho conjunto un sub-espacio vectorial?
(b) ¿Quién es el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$? Cambie el 7 de la esquina inferior derecha por un número que conduzca a un espacio columna más pequeño de la nueva matriz (digamos $\mathbf{M}$). Dicho número es ____.
(c) Encuentre un lado derecho $\boldsymbol{b}$ tal que, para la nueva matriz, el sistema $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga solución; y otro lado derecho $\boldsymbol{b}$ tal que $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tenga solución.

L-6 L-7 L-8 L-9 L-10 L-R

1 Esquema de la **Lección 9**

Esquema de la Lección 9

- *Independencia* lineal
- *Sistema generador* de un espacio
- **BASE** y dimensión

L-6 L-7 L-8 L-9 L-10 L-R

2 Sistema de ecuaciones homogéneo: nuestro punto de partida

Suponga $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ con $m < n$ y el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(más incógnitas que ecuaciones ($m < n$), *columnas libres*)

Entonces *hay* soluciones no nulas a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Hay combinaciones lineales no triviales $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ que son $\mathbf{0}$

3 Independencia lineal

Vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son (*linealmente*) independientes si:

la única combinación lineal que es igual a $\vec{0}$ es

$$(\vec{v}_1)0 + (\vec{v}_2)0 + \cdots + (\vec{v}_n)0$$

es decir

$\boxed{(\vec{v}_1)p_1 + \cdots + (\vec{v}_n)p_n = \vec{0} \quad \text{solo ocurre cuando todos los } p_i \text{ son cero}}$

$$\boxed{[\vec{v}_1; \ldots \vec{v}_n;]\boldsymbol{p} = \vec{0} \quad \text{si y solo si } \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}}$$

4 independencia lineal: ejemplos en $\mathbb{R}^2$

¿Puede encontrar números a y b tales que $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$?

- $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v}$
- $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$
- 2 vectores no alineados
- 3 vectores en $\mathbb{R}^2$

5 independencia lineal y rango de una matriz

Las columnas de $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ son:

- independientes:

  Si el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ es

- dependientes si:

  $\mathbf{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ *para algún $\boldsymbol{c}$ distinto del vector cero.*

- independientes si: $\operatorname{rg}(\mathbf{A})$

- dependientes si: $\operatorname{rg}(\mathbf{A})$

6 Espacio generado por un sistema de vectores: Sistema generador

Sistema generador

El sistema $\mathsf{Z} = [\vec{z}_1; \ldots \vec{z}_j;]$ genera el subespacio $\mathcal{W}$ si sus combinaciones lineales "llenan" $\mathcal{W}$

- $\mathcal{W}$ consiste en todas las combinaciones lineales de $\vec{z}_1, \ldots \vec{z}_j$.
- $\mathcal{W}$ es el menor subespacio que contiene Z.

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\Big([\vec{z}_1; \ldots \vec{z}_j;]\Big).$$

Ejemplo

- El espacio columna:

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{b} \mid \exists \boldsymbol{x} \text{ tal que } \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}\} = \mathcal{L}\Big(\text{las columnas de } \mathbf{A}\Big).$$

- El espacio nulo:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \mathcal{L}\Big(\text{soluciones especiales de } \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\Big).$$

7 Base de un espacio vectorial

Base de un subespacio $\mathcal{W}$
es un sistema de vectores $\left[\vec{z}_1; \dots \vec{z}_d;\right]$ tales que;

1. generan el subespacio $\mathcal{W}$
2. son linealmente independientes

ejemplos
$\mathbb{R}^3$:

$\left[\boldsymbol{a}_1; \dots \boldsymbol{a}_n;\right]$ es una base de $\mathbb{R}^n$ si es una matriz invertible

Todas las bases de un subespacio $\mathcal{W}$ dado tienen el mismo *número* de vectores

8 Dimensión

$\boxed{\text{todas las bases de un subespacio } \mathcal{W} \text{ tienen el mismo } \textit{número} \text{ de vectores}}$

La dimensión de un espacio es ese número

Ese número indica como de “grande” es el espacio

9 Ejemplos: $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

- ¿generan las columnas $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿son las columnas una base de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿Cuál es el $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)$?
- escriba varias bases distintas de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$

$$\boxed{\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = \text{nº pivotes} = \text{dimensión de } \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)}$$

10 Ejemplos: $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ¿está $\boldsymbol{v}$ en $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿Es suficiente $\boldsymbol{v}$ para generar el espacio $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
- escriba otro vector de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ independiente de $\boldsymbol{v}$.
- ¿generan $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ el espacio $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿son $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?
- ¿Cuál es la dimensión del espacio $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$?

$$\boxed{n - \operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right) = \text{ nº variables libres} = \dim \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)}$$

Problemas de la Lección 9

(L-9) PROBLEMA 1. Establezca si los siguientes vectores son o no linealmente independientes, resolviendo $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Decida también, si generan $\mathbb{R}^4$, intentando resolver $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}0, & 0, & 0, & 1,\end{pmatrix}$.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-9) PROBLEMA 2. Señale la opción correcta. Suponga que $\boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_6$ son seis vectores de $\mathbb{R}^4$.

(a) Estos vectores (generan)(no generan)(podrían no generar) $\mathbb{R}^4$.
(b) Estos vectores (son)(no son)(podrían ser) linealmente independientes.
(c) Si esos vectores son las columnas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (tiene)(no tiene)(podría no tener) solución.
(d) Si esos vectores son las columnas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (tiene)(no tiene)(podría no tener) una solución única.

(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-9) PROBLEMA 3. Encuentre una matriz con la siguiente propiedad, o explique por qué no existe tal matriz.

(a) La solución *completa* a $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ es el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{B}$, o diga por qué no existe.

(b) La solución *completa* a $\mathbf{C}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ es el vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{C}$, o diga por qué no existe.

(L-9) PROBLEMA 4. Demuestre que $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ son independientes pero que $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ son dependientes:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Resuelva $\mathbf{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ (donde las $\boldsymbol{v}$ s son las columnas de $\mathbf{A}$).
(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-9) PROBLEMA 5. Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

Si $\mathbf{A}^\intercal = 2\mathbf{A}$, entonces las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.

(L-9) PROBLEMA 6. ¿cuáles de los siguientes vectores generan el espacio $\mathbb{R}^3$?

(a) $(1, 2, 0,)$ y $(0, -1, 1,)$.
(b) $(1, 1, 0,)$, $(0, 1, -2,)$, y $(1, 3, 1,)$.
(c) $(-1, 2, 3,)$, $(2, 1, -1,)$, y $(4, 7, 3,)$.
(d) $(1, 0, 2,)$, $(0, 1, 0,)$, $(-1, 3, 0,)$, y $(1, -4, 1,)$.

(L-9) PROBLEMA 7. ¿Son linealmente dependientes o independientes los siguientes sistemas de vectores? Si son dependientes, escriba un vector como combinación de los otros.

(a) $(-1, 2, 3,)$, $(2, 1, -1,)$, y $(4, 7, 3,)$ en $\mathbb{R}^3$.
(b) $(1, 2, 0,)$ y $(0, -1, 1,)$ en $\mathbb{R}^3$.
(c) $(1, 2,)$, $(2, 3,)$, y $(8, -2,)$ en $\mathbb{R}^2$.
(d) $t^2 + 2t + 1,\quad t^3 - t^2,\quad t^3 + 1,\ $ y $\ t^3 + t + 1$ en P_3.

(L-9) PROBLEMA 8. Suponga que la única solución de $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ es $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. ¿Cuál es el rango y por qué? Las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente ____________.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-9) PROBLEMA 9. **[Importante]** Si $\mathbf{A}$ es de orden 4×6, demuestre que las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.

(L-9) PROBLEMA 10. $\mathbf{A}$ is such that $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}\left(\left[\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\1\end{pmatrix};\right]\right)$.

(a) Find a matrix $\mathbf{B}$ such that its column space $\mathcal{C}(\mathbf{B}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$. [Thus, any vector $\boldsymbol{y} \in \mathcal{N}(A)$ satisfies $\mathbf{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y}$ for some $\boldsymbol{u}$.]
(b) Give a different possible answer to (a): another $\mathbf{B}$ with $\mathcal{C}(\mathbf{B}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.
(c) For some vector $\boldsymbol{b}$, you are told that a particular solution to $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4,\end{pmatrix}$$

Now, your classmate Zarkon tells you that a second solution is:

$$\boldsymbol{x}_Z = \begin{pmatrix}1, & 1, & 3, & 0,\end{pmatrix}$$

while your other classmate Hastur tells you "No, Zarkon's solution can't be right, but here's a second solution that is correct:"

$$\boldsymbol{x}_H = \begin{pmatrix}1, & 1, & 3, & 1,\end{pmatrix}$$

Is Zarkon's solution correct, or Hastur's solution, or are both correct? (Hint: what should be true of $\boldsymbol{x}$ - $\boldsymbol{x}_p$ if $\boldsymbol{x}$ is a valid solution?)

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

(L-9) PROBLEMA 11. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre una base del espacio columna (del espacio vectorial generado por las columnas) $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$.
(b) Encuentre una base del espacio nulo (del conjunto de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.
(c) Encuentre las condiciones lineales sobre a, b, c, d que garantizan que el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (a, b, c, d,)$ tiene solución.
(d) Encuentre la solución completa al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, March 5, 2007

(L-9) PROBLEMA 12. Si a una matriz $\mathbf{A}$ se le "añade" una nueva columna extra $\boldsymbol{b}$, entonces el espacio columna se vuelve más grande, a no ser que ____________. Proporcione un ejemplo en el que espacio columna se haga más grande, y uno en el que no. ¿Por qué $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es resoluble cuando el espacio columna no crece al añadir $\boldsymbol{b}$?

(L-9) PROBLEMA 13. Si el sistema de 9 por 12 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es resoluble para todo $\boldsymbol{b}$, entonces $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) =$ ____
(Strang, 2007, ejercicio 30 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-9) PROBLEMA 14. **[Importante]**[1] Suponga que el sistema $\left[\boldsymbol{v}_1; \ldots \boldsymbol{v}_n\right]$ de vectores de $\mathbb{R}^m$ genera el subespacio $\mathcal{V}$, y suponga que $\boldsymbol{v}_n$ es una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_{n-1}$. Demuestre que el sistema $\left[\boldsymbol{v}_1; \ldots \boldsymbol{v}_{n-1}\right]$ también genera el subespacio $\mathcal{V}$.

(L-9) PROBLEMA 15.

(a) Encuentre la solución completa al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Encuentre una base del espacio columna de la siguiente matriz por bloques de orden 3 por 9 $\left[\mathbf{A}; \quad 2\mathbf{A}; \quad \mathbf{A}^2;\right]$.

MIT Course 18.06 Final, May 18, 1998

[1] *pista:* Piense si el espacio $\mathcal{V}$ se puede expresar como el espacio columna de una matriz $\mathbf{V}$ cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. Una vez expresado de esa manera, recuerde que las operaciones entre columnas no alteran el espacio columna de la matriz. Por último, transforme $\mathbf{V}$ de manera que transforme una de las columnas en un vector de ceros.

(L-9) PROBLEMA 16. ¿Cuáles de los siguientes vectores generan el espacio de polinomios de, a lo sumo, grado 4; es decir, el conjunto de polinomios $P_3 = \{at^3 + bt^2 + ct + d\}$?

(a) $t + 1, \;\; t^2 - t, \;$ y $\; t^3$.
(b) $t^3 + t \;$ y $\; t^2 + 1$.
(c) $t^2 + t + 1, \;\; t + 1, \;\; 1, \;$ y $\; t^3$.
(d) $t^3 + t^2, \;\; t^2 - t, \;\; 2t + 4, \;$ y $\; t^3 + 2t^2 + t + 4$.

(L-9) PROBLEMA 17. Considere los vectores $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 1,)$ y $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 1,)$.

(a) **Demuestre** que $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ son linealmente independientes.
(b) ¿Pertenece $\boldsymbol{v} = (2, 1, 2,)$ al espacio generado por $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$? Explique las razones de su respuesta.
(c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a $\boldsymbol{u}_1$ y a $\boldsymbol{u}_2$. Explique su respuesta.

(L-9) PROBLEMA 18.

(a) ¿Son linealmente independientes los siguientes vectores? Explique su respuesta.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Son los siguientes vectores una base de $\mathbb{R}^4$? Explique su respuesta.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(c) ¿Son los siguientes vectores una base del subespacio descrito por el plano tridimensional $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$? Explique su respuesta.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Encuentre el valor de q para el que los siguientes vectores no generan $\mathbb{R}^3$.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} q \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(L-9) PROBLEMA 19. Suponga que tiene 4 vectores columna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{z}$ en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$.

(a) Dé un ejemplo donde el espacio columna de **A** contenga $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, pero no a $\boldsymbol{z}$. (escriba unos vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{z}$; y una matriz **A** que cumplan lo anterior).

(b) ¿Cuáles son las dimensiones del espacio columna y del espacio nulo de su matriz ejemplo **A** del apartado anterior?

1 Esquema de la **Lección 10**

Esquema de la Lección 10

- Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz **A**
  - Espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$
  - Espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$
  - Espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$
  - Espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$

2 Los cuatro subespacios fundamentales de una matriz **A**

¿Donde están estos subespacios si $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$?

- Espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$
- Espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$
- Espacio fila
  Combinaciones lineales de las filas
  Combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{A}^\intercal = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$
- Espacio nulo por la izquierda de **A**, $\quad\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$

3 Bases de los 4 subespacios: Espacio fila

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right]=\left[\begin{array}{cccc}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\\\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\tau}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&-1&-1&0\\1&0&0&0\\\hline 1&-2&-3&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{2}]\\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\tau}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\\hline -1&2&-1&-1\\1&-1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{E}}\right]$$

operaciones preservan $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$ (pero no el espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$)

$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)\neq\mathcal{C}\left(\mathbf{L}^\intercal\right)\neq\mathcal{C}\left(\mathbf{R}^\intercal\right);\quad (1,\ 2,\ 3,\ 1,)\in\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)\text{ pero }\notin\mathcal{C}\left(\mathbf{R}^\intercal\right)$$

¿Cuál es la dimensión del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?
¿base del espacio fila de **A**?
¿base del espacio columna de **A**?

4 Espacio nulo por la izquierda: ¿por qué ese nombre?

$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$

$$(\mathbf{A}^\intercal)\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{A}^\intercal & \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir. . .

$$\boldsymbol{y}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} y_1, & \dots & y_m, \end{pmatrix}\begin{bmatrix} & \mathbf{A} & \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & \dots & 0, \end{pmatrix}$$

5 Eliminación por columnas no modifica el espacio nulo por la izquierda

Sea $\underset{n\times n}{\mathbf{E}} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$ (invertible) entonces

- Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}\mathbf{AE} = \mathbf{0E} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^\intercal\right);$$

- Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^\intercal\right)$

$$\boldsymbol{x}\mathbf{AE} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0E}^{-1} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right).$$

Por tanto,

$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) = \mathcal{N}\left((\mathbf{AE})^\intercal\right) = \mathcal{N}\left(\left(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}\right)^\intercal\right).$$

6 Encontrando una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ mediante eliminación por columnas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(-3)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

¿Base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?

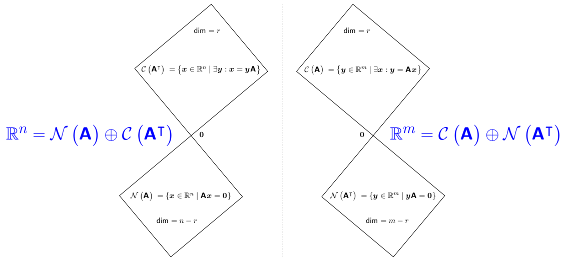
$$\left[\begin{pmatrix} -1, & 0, & 1, \end{pmatrix};\right]$$

7 Encontrando una base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ mediante eliminación por columnas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & a+c \\ d & e & d+f \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+b & b & a+c \\ d+e & e & d+f \end{bmatrix}$$

¿Base de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?

8 Los 4 espacios



$\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ ¿dimensiones?

- $\dim\big(\mathcal{C}(\mathbf{A})\big) = \qquad\qquad = \dim\big(\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)\big)$
- $\dim\big(\mathcal{N}(\mathbf{A})\big) =$
- $\dim\big(\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)\big) =$

Problemas de la Lección 10

(L-10) PROBLEMA 1. Encuentre la dimensión, y construya una base para los cuatro subespacios asociados con cada una de las siguientes matrices

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&2&8&0\end{bmatrix}$

(b) ¿Cuánto suma $\dim\mathcal{C}(\mathbf{A}) + \dim\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$? ¿Y $\dim\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) + \dim\mathcal{N}(\mathbf{A})$?

(c) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}0&1&4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

(d) ¿Cuánto suma $\dim\mathcal{C}(\mathbf{U}) + \dim\mathcal{N}(\mathbf{U}^\intercal)$? ¿Y $\dim\mathcal{C}(\mathbf{U}^\intercal) + \dim\mathcal{N}(\mathbf{U})$?

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 2. Describa los cuatro subespacios en el espacio tridimensional asociados con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 3.

(a) Si el rango de una matriz 7 por 9 es 5, ¿Cuáles son las dimensiones de sus cuatro subespacios fundamentales? ¿Cuánto suman las cuatro dimensiones?

(b) Si es rango de una matriz de 3 por 4 es 3, ¿cuáles son el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$?

(Strang, 2007, ejercicio 20 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 4. Si $\mathbf{A}$ tiene los mismos cuatro subespacios fundamentales que $\mathbf{B}$, ¿Es cierto que $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$?
(Strang, 2007, ejercicio 19 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 5. Encuentre la dimensión y una base para cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}; \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} = \mathbf{AE}; \quad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&-2&2&-1\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Basado en (Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 6. Encuentre las dimensiones de los siguientes espacios vectoriales:

(a) El espacio de todos los vectores en $\mathbb{R}^4$ tales que la suma de sus componentes es cero.

(b) El espacio nulo de la matriz identidad de 4 por 4.

(c) El espacio de todas las matrices de 4 por 4

(Strang, 2007, ejercicio 32 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-10) PROBLEMA 7. Sin multiplicar las matrices, encuentre bases de los espacios fila y columna de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2\\4&5\\2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

¿Cómo sabe a partir de esta factorización que $\mathbf{A}$ no es invertible?
(Strang, 2007, ejercicio 36 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-10) PROBLEMA 8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son sub-espacios vectoriales? Para aquellos casos que no lo son, muestre un ejemplo que viole alguna de las propiedades.

(a) Dada una matriz $\mathbf{A}$ de orden 3×5 con rango completo por filas, el conjunto de soluciones del sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(b) vectores $\boldsymbol{x}$ tales que $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \mathbf{0}$ y $\langle\vec{x}|\vec{z}\rangle = \mathbf{0}$ para los vectores particulares $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$.

(c) Todas las matrices de orden 3×5 cuyo espacio columna contiene al vector $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

(d) Todas las matrices de orden 5×3 con $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ en su espacio nulo.

MIT Course 18.06 Quiz 1, Spring, 2009

(L-10) Problema 9. ¿Cuál es el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y el espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

MIT Course 18.06 Final. May 18, 1998

(L-10) Problema 10. Si $\underset{5\times 4}{\mathbf{A}}$ es una matriz con sus cuatro columnas linealmente independientes, escriba explícitamente:

(a) El espacio nulo de $\mathbf{A}$.
(b) La dimensión del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.
(c) Una solución particular $\boldsymbol{x}_p$ del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_{|2}$.
(d) La solución general (completa) de $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_{|2}$.
(e) La forma escalonada reducida $\mathbf{R}$ de la matriz $\mathbf{A}$.

(L-10) Problema 11. Verdadero o falso

(a) Si una matriz es cuadrada $(m = n)$, entonces el espacio columna es igual al espacio fila.
(b) La matriz $\mathbf{A}$ y la matriz $(-\mathbf{A})$ comparten los mismos cuatro sub-espacios fundamentales.
(c) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ comparten los mismos cuatro sub-espacios fundamentales, entonces $\mathbf{A}$ es un múltiplo de $\mathbf{B}$.
(d) Indique si la siguiente aseveración es verdadera o falsa. Si es verdadera explique el motivo, si es falsa encuentre un contraejemplo: *"Un sistema con n ecuaciones y n incógnitas es resoluble cuando las columnas de la matriz de coeficientes son independientes."*

(L-10) Problema 12. Se conoce la siguiente información sobre $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{y que} \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{w} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

De hecho, $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es siempre algún múltiplo del vector $(-2, \quad 1,)$ sea cual sea el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$.

(a) ¿Cuál es el orden y el rango de $\mathbf{A}$?
(b) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?
(c) ¿Cuál es la dimensión del espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$?
(d) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$?
(e) Encuentre una solución $\boldsymbol{x}$ no nula al sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(L-10) Problema 13. Sea la matriz $\mathbf{A}$ con su forma escalonada reducida por columnas $\mathbf{R}$ calculada mediante eliminación gaussiana sin efectuar permutaciones:

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3/8 & 2/8 & -3 & -1 & -1/8 \\ -5/8 & 2/8 & 2 & 0 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/8 & 2/8 & 0 & 0 & 3/8 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{E}}\right]$$

(a) ¿Cuál es el rango de $\mathbf{A}$? ¿y las dimensiones del espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, del espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ y del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$?
(b) Encuentre una base del espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$.
(c) Encuentre una base del espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.
(d) Encuentre una base del espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.
(e) Exprese $\mathbf{A}_{|3}$ como una combinación lineal de $\mathbf{A}_{|1}$, $\mathbf{A}_{|2}$, $\mathbf{A}_{|4}$ y $\mathbf{A}_{|5}$.

(L-10) PROBLEMA 14. Construya (si es que es posible) una matriz cuyo espacio nulo esté generado por todas las combinaciones de $(2, 2, 1, 0,)$ y $(3, 1, 0, 1,)$.
(Strang, 2007, ejercicio 60 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-10) PROBLEMA 15. Construya (si es que es posible) una matriz cuyo espacio nulo sea todas las combinaciones de $(4, 3, 2, 1)^\intercal$
(Strang, 2007, ejercicio 61 del conjunto de problemas 2.2.)

(L-10) PROBLEMA 16.

(a) Suponga que el producto de **A** y **B** es la matriz nula: $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Entonces el espacio (I)_______________ de la matriz **A** contiene el espacio (II)_______________ de la matriz **B**. También el espacio (III)_______________ de la matriz **B** contiene el espacio (IV)_______________ de la matriz **A**. (incluya los nombres de los cuatro espacios fundamentales en los lugares apropiados)

    (I)_______________, (II)_______________, (III)_______________,
    (IV)_______________

(b) Suponga que la matriz **A** es de dimensiones 5 por 7 con rango r, y **B** es de dimensiones 7 por 9 de rango s. ¿Cuáles son las dimensiones de los espacios (I) y (II)? Del hecho de que el espacio (I) contiene el espacio (II), ¿qué sabe acerca de $r + s$?

(L-10) PROBLEMA 17. Mediante eliminación gausiana por columnas (y posiblemente algún intercambio de columnas) sobre la matriz **A** de orden 4×8

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrrrrrrr}
1 & 2 & -2 & 1 & -5 & 0 & 2 & -3\\
-1 & -2 & 1 & -2 & 3 & 0 & -2 & 0\\
1 & 2 & -2 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2\\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrrrrrr}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline
2/4 & -2 & -2/4 & -3 & 1 & 0 & -2 & 3/4\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2/4 & 0 & 2/4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 3/4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-2/4 & 0 & -2/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\mathbf{R}\\ \hline \mathbf{E}\end{array}\right]$$

(a) ¿Cuál es el rango de **A**?
(b) ¿Cuáles son las dimensiones de los cuatro espacios fundamentales de **A**?

(c) ¿Cuantas soluciones tiene el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$? ¿Depende la respuesta de cómo es $\boldsymbol{b}$? Justifique su respuesta.
(d) ¿Son las filas de **A** linealmente independientes? ¿Por qué?
(e) Escriba una base de $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ (del conjunto de soluciones del sistema homogeneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$).
(f) Escriba una base del espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.
(g) Escriba, si es posible, la matriz $\left[\mathbf{A}_{|1};\ \mathbf{A}_{|3};\ \mathbf{A}_{|6};\ \mathbf{A}_{|7};\right]^{-1}$
(h) Escriba, si es posible, la matriz $\left[\mathbf{A}_{|1};\ \mathbf{A}_{|3};\ \mathbf{A}_{|6};\ \mathbf{A}_{|8};\right]^{-1}$

Basado en *MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004*

(L-10) PROBLEMA 18. Sea la matriz **R** de dimensiones 5 por 3 (en su forma escalonada reducida por columnas) con tres pivotes ($r = 3$).

(a) ¿Cual es el espacio nulo de **R**?
(b) Sea la matriz por bloques **B** de 10 por 3; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ 2\mathbf{R}\end{bmatrix}$. ¿Cuál es la forma escalonada reducida por columnas de esta matriz? ¿y su rango?
(c) Sea la matriz por bloques **C** de 10 por 6; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{R}\\ \mathbf{R} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$. ¿Cuál es la forma escalonada reducida por columnas de esta matriz?
(d) ¿Cual es el rango de **C**?
(e) ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo de $\mathbf{C}^\intercal$; $\dim \mathcal{N}(\mathbf{C}^\intercal)$?

(L-10) PROBLEMA 19. Sea el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$

cuya solución completa es $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, c, d \in \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

(a) (1^{pts}) ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial generado por las filas de **A**? Explique su respuesta.
(b) (1^{pts}) ¿Quién es **A** (escriba la matriz completa)? Explique su respuesta.
(c) (0.5^{pts}) ¿Para qué vectores $\boldsymbol{b}$ el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución?

(L-10) PROBLEMA 20. ¿Falso o verdadero? (proporcione una razón aceptable)

(a) Si las columnas de una matriz son dependientes, también lo son las filas.
(b) El espacio columna de una matriz de 2 por 2 es el mismo que su espacio fila.
(c) El espacio columna de una matriz 2 por 2 tiene la misma dimensión que su espacio fila.
(d) Las columnas de una matriz son una base para el espacio columna.

(Strang, 2007, ejercicio 28 del conjunto de problemas 2.3.)

(L-10) PROBLEMA 21. Si **A** es una matriz y **R** es su forma escalonada reducida **por filas**. Conteste verdadero o falso a las siguientes afirmaciones. (Si hay contraejemplos a las afirmaciones, debe elegir "falso" como respuesta).

(a) Si $\boldsymbol{x}$ es una solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entonces también es solución al sistema $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
(b) Si $\boldsymbol{x}$ es una solución a $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces también es solución al sistema $\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
(c) ¿Y si **R** fuera la forma reducida **por columnas** de **A**?

1 Esquema de la **Lección**

Esquema de la Lección

- Bases de nuevos espacios vectoriales
- Matrices de rango uno
- Variables libres

2 Un nuevo espacio vectorial

$\mathbb{R}^{3\times 3}$: ¡Todas las matrices 3×3! $\quad \mathbf{A} + \mathbf{B}$; $\quad c\mathbf{A}$; $\quad \underset{3\times 3}{\mathbf{0}}$

subespacios de $\mathbb{R}^{3\times 3}$

- $\mathcal{U}$: Todas las matrices triangulares superiores
- $\mathcal{S}$: Todas las matrices simétricas
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}$: Intersección de los dos anteriores:

¿Cuál es la dimensión de estos subespacios?

¿Es $\mathcal{U} \cup \mathcal{S}$ un subespacio?

Sea $\mathcal{U} + \mathcal{S}$ el conjunto de todas las sumas de cualquier vector de $\mathcal{U}$ + cualquiera de $\mathcal{S}$; entonces $\mathcal{U} + \mathcal{S} =$?

3 Matrices de rango 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & & \end{bmatrix}$$

- ¿Una base del espacio fila $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$?:
- ¿Una base del espacio columna $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$?

¿Dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$, dimensión de $\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$ y $\operatorname{rg}\left(\mathbf{A}\right)$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Toda matriz de rango uno tiene una descomposición de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{|1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{1|}\mathbf{A} \end{bmatrix}^{\intercal} = \text{matriz columna por matriz fila}$$

4 Matrices de rango 1

Suponga el subconjunto de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \right\}$$

¿Es $\mathcal{S}$ un subespacio?

¿dimensión y base?

$\mathcal{S}$ es espacio nulo de cierta matriz $\mathbf{A}$ $\quad (\mathbf{A}\boldsymbol{v} = 0)\ldots$ ¿Qué matriz?

5 Matrices de rango 1

$$\underset{1\times 4}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = \qquad\qquad \mathcal{S} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

- $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) =$
- ¿base de $\mathcal{S} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$?

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \right]$$

- $\dim \mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) =$
- $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal) =$ ¿base $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$?

6 Un problema de Microeconomía

Resuelva Y en términos de X para obtener la FPP

$$\begin{cases} X & & = 4L_x \\ & Y & = 3L_y \\ & & L_x + L_y = 80 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} X & - 4L_x & = 0 \\ Y & - 3L_y & = 0 \\ & L_x + \; L_y & = 80 \end{cases}$$

("en términos de" X significa X libre)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -80 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -80 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}] \\ [(80)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & -4 & 320 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = L_y \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 - 4L_y \\ 3L_y \\ 80 - L_y \\ L_y \end{pmatrix}$$

"en términos de" L_y

7 Variable libre

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & -4 & 320 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(\frac{-1}{4})\mathbf{4}] \\ [(-320)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 80 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 240 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow a = X \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ L_x \\ L_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 240 - \frac{3}{4}X \\ \frac{1}{4}X \\ 80 - \frac{1}{4}X \end{pmatrix}$$

"en términos de" X

8 Variables libres

$$\begin{cases} x+2y-z+w=-1\\ -x-2y+3z+5w=-5\\ -x-2y-z-7w=7 \end{cases}$$

1. Resuelva en función de y y w
2. Resuelva en función de x y w
3. Resuelva en función de x y z
4. Resuelva en función de x y y

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 3 & 5 & -5\\ -1 & -2 & -1 & -7 & 7\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}]\\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 6 & -6\\ -1 & 0 & -2 & -6 & 6\\ \hline 1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}]\\ [(3)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0\\ \hline 1 & -2 & 1 & -4 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 4\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{1}]\\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ \frac{-1}{2} & -2 & 2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(\frac{-1}{3})\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ \frac{-1}{2} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}\right] \\ \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{1}]\\ [(4)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ \frac{-1}{2} & -2 & 2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{2}]\\ [(\frac{1}{2})\mathbf{2}+\mathbf{1}]\\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \end{array}\right] \end{cases}$$

Problemas de la Lección opcional 1

(L-Opt-1) Problema 1.

(a) ¿Cuál es el menor subespacio de matrices de 3 por 3 que contiene a todas las matrices simétricas y a todas las matrices triangulares inferiores?

(b) ¿Cuál es el mayor subespacio que está contenido los dos subespacios anteriores?

(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 2.1.)

(L-Opt-1) Problema 2. Para cada una de las siguientes afirmaciones, diga si sin verdaderas o falsas. Justifique su respuesta

(a) **Verdadero/Falso:** El conjunto de matrices 3 por 3 no invertibles es un sub-espacio.

(b) **Verdadero/Falso:** Si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\mathbf{A}$ no es de rango completo por filas.

(c) **True/False:** There exist $n\times n$ matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ such that $\mathbf{B}$ is not invertible but $\mathbf{AB}$ is invertible.

(d) **True/False:** For any permutation matrix $\mathbf{P}$, we have that $\mathbf{P}^2=\mathbf{I}$.

MIT Course 18.06 Quiz 1, October 4, 2004

(L-Opt-1) Problema 3.

(a) Sean los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ en $\mathbb{R}^7$ ¿Cuál es la dimensión (o cuáles son las posibles dimensiones) del espacio generado por estos tres vectores?
(b) Sea una matriz cuadrada $\mathbf{A}$. Si su espacio nulo $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$ está compuesto únicamente por el vector nulo $\mathbf{0}$, ¿Cuál es el espacio nulo de su traspuesta (espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$?
(c) Piense en el espacio vectorial de todas las matrices de orden 5 por 5, $\mathbb{R}^{5\times5}$. Piense en el subconjunto de matrices 5 por 5 que son invertibles ¿es este subconjunto un sub-espacio vectorial? Si lo es, explique el motivo; si no lo es encuentre un contraejemplo.
(d) Indique si la siguiente aseveración es verdadera o falsa. Si es verdadera explique el motivo, si es falsa encuentre un contraejemplo: *"Si* $\mathbf{B}^2=\mathbf{0}$, *entonces necesariamente* $\mathbf{B}=\mathbf{0}$*"*
(e) Si intercambio dos columnas de la matriz $\mathbf{A}$ ¿qué espacios fundamentales siguen siendo iguales?
(f) Si intercambio dos filas de la matriz $\mathbf{A}$ ¿qué espacios fundamentales siguen siendo iguales?
(g) ¿Por qué el vector $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ no puede estar en el espacio nulo de una matriz $\mathbf{A}$ y simultáneamente ser una fila de dicha matriz?

(L-Opt-1) Problema 4. Empleando la definición de sub-espacio vectorial, verifique si los siguientes subconjuntos son sub-espacios vectoriales del espacio vectorial que los contiene.

(a) $\mathcal{V}$ es el espacio vectorial de todas las matrices 2×2 de números reales, con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar; y el conjunto $\mathcal{W}$ son todas las matrices de la forma
$$\begin{bmatrix}a & b\\0 & b\end{bmatrix}$$
donde a y b son números reales.
(b) $\mathcal{V}$ es el espacio vectorial $C[0,1]$ de todas las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$; y el conjunto $\mathcal{W}$ son todas las funciones $f\in C[0,1]$ tales que $f(0)=2$.

(L-Opt-1) Problema 5. Encuentre una base (de dimensión infinita) para el espacio de todos los polinomios

$$\mathcal{P}=\left\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \;\middle|\; \text{para todo } n\right\}.$$

(L-Opt-1) Problema 6. ¿Cuál es la dimensión de los siguientes espacios?

(a) El conjunto de matrices simétricas de orden 2×2, $\mathbf{A}=\mathbf{A}^\intercal$.
$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc}a & b\\b & d\end{array}\right],$$
(b) El conjunto de matrices simétricas de orden 2×2
$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc}a & b\\c & d\end{array}\right],$$
tales que $a+d=0$.
(c) El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$ de la forma
$\left\{\Big(x,\;y,\;(x-3y),\;(2y-x),\Big)\;\mid\;x,y\in\mathbb{R}\right\}.$

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.