# Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

21/01/2025





Puede encontrar la última versión de este material en

https://mbujosab.github.io/MatematicasII/







## 1 Esquema de la **Lección 11**

### Esquema de la Lección 11

- Vectores y subespacios ortogonales
- Espacio nulo $\perp$ espacio fila
$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)$$
- espacio nulo por la izquierda $\perp$ espacio columna
$$\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right) \perp \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$$

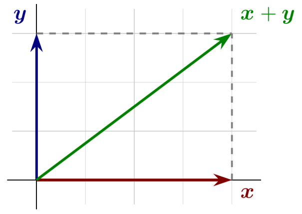




## 2 Algunas definiciones

- Producto punto
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$
- Longitud de un vector $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ $\quad$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2.$
- Vector unitario: $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ $\quad$ $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\cdot\boldsymbol{x}$
- Vectores ortogonales (perpendiculares): $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$

## 3 Vectores ortogonales




$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \iff \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$$

Tma. Pitágoras: $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \iff \|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).$$





## 4 Norma al cuadrado de un vector

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad\to\quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \qquad ; \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \quad\to\quad \|\boldsymbol{y}\|^2 = \qquad ;$$

¿Son estos vectores ortogonales?

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}; \qquad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \qquad ;$$

(Pitágoras) (Ortogonalidad)

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \iff \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$$





## 5 Subespacios ortogonales

Cuando el subespacio $\mathcal{S}$ es ortogonal al subespacio $\mathcal{T}$:

$$\boxed{\text{Cada vector de } \mathcal{S} \text{ es ortogonal a cada vector de } \mathcal{T}}$$

¿Son ortogonales el plano de la pizarra y el suelo?





## 6 Espacio nulo ortogonal a espacio fila

- $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \perp$ filas de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix}({}_{1|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{x}\\ \vdots \\ ({}_{m|}\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

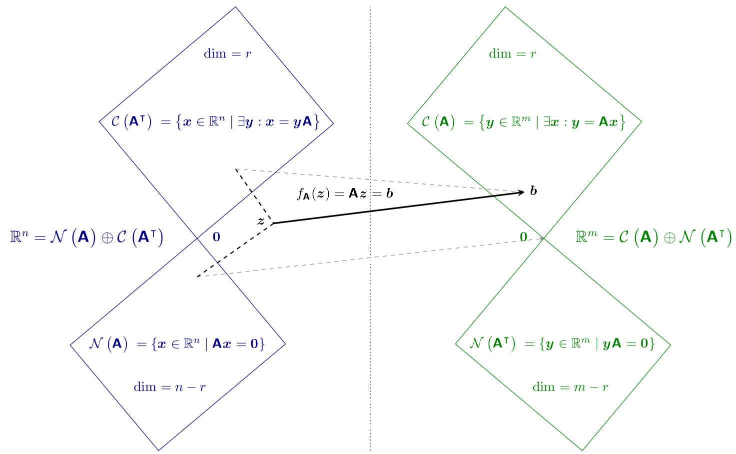
- $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \perp \boldsymbol{d}\mathbf{A}, \quad \forall \boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^m$ (cualquier combinación lineal de las filas)

$$\boldsymbol{x}\in\mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{d}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}\cdot\mathbf{0} = 0.$$

$$\boxed{\text{espacio nulo} \perp \text{espacio fila} \qquad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)\perp\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)}$$

*También*: $\quad \boldsymbol{x}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\intercal}\right)\perp\mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right)$

## 7 El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales




$$\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}) \qquad \mathcal{C}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$$

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{x}$$





## 8 Revisitando la eliminación gaussiana

Algoritmo que encuentra una base del complemento ortogonal

Dame varios vectores y los escribo como filas de una matriz $\mathbf{M}$ . . .

$$\left[\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{[(3)\mathbf{1}+\mathbf{2}]\\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{4}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{3}]\\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\boldsymbol{\tau}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{E}}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{D} & \mathbf{N} \end{array}\right]$$

Base del espacio generado por los vectores (fila): $\mathcal{V}$

Base del complemento ortogonal: $\mathcal{V}^\perp$ $\qquad \mathbf{M}\mathbf{N} = \mathbf{0}$

Pero si me das $\mathbf{N}_{|1}$ y $\mathbf{N}_{|2}$ y empiezo de nuevo. . . obtendré una base de. . .





## Problemas de la Lección 11

(L-11) Problema 1. Describa el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.15 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) Problema 2. ¿Hay algún vector que sea perpendicular a si mismo?

(L-11) Problema 3. Calcule la longitud de cada uno de estos vectores

(a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. (e) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(Hefferon, 2008, ejercicio 2.11 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) Problema 4. Encuentre un vector unitario (de norma uno) con la misma direccción que $\boldsymbol{v} = (2, -1, 0, 4, -2)$.

(L-11) Problema 5. Encuentre el valor de $k$ de manera que estos vectores sean perpendiculares.

$$(k, \quad 1,), \qquad (4, \quad 3,).$$





(Hefferon, 2008, ejercicio 2.14 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) Problema 6. Escriba una matriz con las propiedades requeridas, o explique por qué es imposible:

(a) El espacio columna contiene $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$, el espacio nulo contiene $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(b) El espacio fila contiene $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$, y el espacio nulo contiene $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ tiene solución, y $\mathbf{A}^\intercal \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(d) Cada fila es ortogonal a cada columna (y $\mathbf{A}$ no es la matriz cero)

(e) La suma de columnas da una columna de ceros, la suma de filas suma una fila de unos.

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) Problema 7. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, las columnas de $\mathbf{B}$ pertencen a ________ de $\mathbf{A}$. Las filas de $\mathbf{A}$ están contenidas en el __________ de $\mathbf{B}$. Por qué no es posible que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean matrices 3 por 3 de rango 2?
(Strang, 2003, ejercicio 4 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 8. Suponga que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ y que $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$. ¿Debe ocurrir que $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$?
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.20 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 9.

(a) Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ tiene solución y $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{y}$ es perpendicular a ____.
(b) Si $\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ tiene solución y $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a ____.

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 4.1.)

(L-11) PROBLEMA 10. Demuestre, para $\mathbb{R}^n$, que si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son perpendiculares, entonces $||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||^2=||\boldsymbol{u}||^2+||\boldsymbol{v}||^2$.
(Hefferon, 2008, ejercicio 2.33 del conjunto de problemas II.2.)

(L-11) PROBLEMA 11. Encuentre una matriz de 1 por 3 cuyo espacio nulo conste de todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $x_1+2x_2+4x_3=0$. Encuentre una matriz de 3 por 3 con el mismo espacio nulo.
(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 2.4.)

(L-11) PROBLEMA 12. Consider $\underset{4\times 2}{\mathbf{A}}$ with exactly two special solutions for $\boldsymbol{x}\mathbf{A}=\boldsymbol{0}$:

$\boldsymbol{s}_1=\left(3,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\right)$, and $\boldsymbol{s}_2=\left(6,\quad 0,\quad 2,\quad 1,\right)$.

(a) Find the reduced row echelon form $\mathbf{R}$ of $\mathbf{A}$.
(b) What is the row space of $\mathbf{A}$?
(c) What is the complete solution to $\boldsymbol{x}\mathbf{R}=\left(3,\quad 6,\right)$?





(d) Find a combination of rows 2, 3, 4 that equals $\boldsymbol{0}$. (Not OK to use $0({}_{2|}\mathbf{A})+0({}_{3|}\mathbf{A})+0({}_{4|}\mathbf{A})$. The problem is to show that these rows are dependent.)

(L-11) PROBLEMA 13. Suponga que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ tiene solución (quizá tiene muchas). Puede demostrase que cualquier solución $\boldsymbol{x}$ de dicho sistema puede descomponerse como suma de dos vectores $(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_f+\boldsymbol{x}_n)$ donde $\boldsymbol{x}_f$ es combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{x}_n$ pertenece al subespacio vectorial de soluciones de $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

(a) ($0.5^{\text{pts}}$) Demuestre que $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}_f)=\boldsymbol{b}$.
(b) ($1^{\text{pts}}$) Suponga que $\boldsymbol{v}_f$ es combinación lineal de las filas de $\mathbf{A}$ y que además $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_f)=\boldsymbol{b}$. ¿A qué subespacios vectoriales pertenece la diferencia $(\boldsymbol{v}_f-\boldsymbol{x}_f)$? Demuestre que $\boldsymbol{x}_f$ y $\boldsymbol{v}_f$ son iguales.
(c) ($1^{\text{pts}}$) Encuentre la solución $\boldsymbol{x}_f$ del subespacio vectorial generado por las filas de $\mathbf{A}$, para el siguiente sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, encontrando los valores $c$ y $d$ que cumplen

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_f=\begin{pmatrix}14\\9\end{pmatrix}\quad\text{con}\quad\boldsymbol{x}_f=c\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$





## 1 Esquema de la **Lección 12**

## Esquema de la Lección 12

- De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas (o implícitas)
- Escogiendo ente las ecuaciones paramétricas





## 2 Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos

### Ecuaciones cartesianas (implícitas) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$:

Por ejemplo

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=\text{c. sol. de }\begin{cases}x_1-x_2+x_3=1\\ \qquad\qquad\; x_3=1\end{cases}$$

### Ecuaciones paramétricas:

Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1:\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

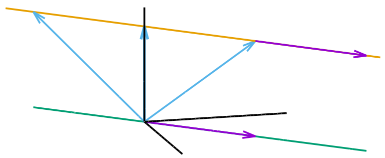
En este caso dimensión 1     Una recta (sólo hay un parámetro $a$)
recta     recta

o bien

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

o bien

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$







## 3 Ecuaciones cartesianas (implícitas) y paramétricas de rectas y planos

### Ecuaciones cartesianas (implícitas) $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$:

Por ejemplo

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = (1,)\right\} = \text{c. sol. de } \left\{x_1 - x_2 + x_3 = 1\right.$$

### Ecuaciones paramétricas:

Para el conjunto del ejemplo anterior

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

En este caso dimensión 2 plano

Un plano (hay dos parámetros $a$ y $b$) plano



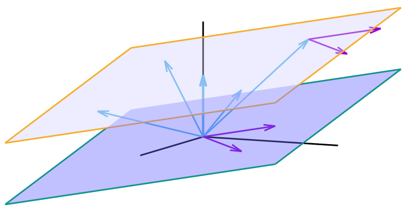


o bien

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

pero también

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$







## 4 De las ecuaciones paramétricas a las cartesianas

$$\boxed{\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \perp \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)}$$

Considere

$$H = \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^k : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} + \left[\boldsymbol{n}_1;\ \dots\ \boldsymbol{n}_k;\right]\boldsymbol{p}\right\}.$$

Si encontramos $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{0}$ entonces si $\boldsymbol{x}\in H$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \mathbf{A}\boldsymbol{s} + \underbrace{\mathbf{A}\left[\boldsymbol{n}_1;\ \dots\ \boldsymbol{n}_k;\right]}_{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{p} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{b}, \quad \text{donde } \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{s}.$$

Por tanto

$$H = \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\right\}.$$

## 5 De la solución al sistema de ecuaciones

Ecuaciones implícitas del plano $P$ paralelo al generado por $(1,2,0,-2)$ y $(0,0,1,3)$ que pasa por $\boldsymbol{s}=(1,3,1,1)$.

$$P=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\ \middle|\ \exists a,b\in\mathbb{R}:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \exists\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2:\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&1\\-2&3\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$$

Necesitamos vectores perpendiculares a $(1,2,0,-2)$ y a $(0,0,1,3)$





## 6 De la solución al sistema de ecuaciones

$$\boldsymbol{x}=(x,y,z,w,);\qquad \boldsymbol{s}=(1,3,1,1,).$$

$$\left[\begin{array}{cccc}1&2&0&-2\\0&0&1&3\\\hline x&y&z&w\\\hline 1&3&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(2)\mathbf{1}+\mathbf{4}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-2)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&0&1&3\\\hline x&y-2x&z&w+2x\\\hline 1&1&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-3)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&0&1&0\\\hline x&y-2x&z&w+2x-3z\\\hline 1&1&1&0\end{array}\right]$$

Así $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\2&0&-3&1\end{bmatrix}$; y entonces $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-2x+y\\2x+w-3z\end{pmatrix}$ y

$\boldsymbol{b}=\mathbf{A}\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Por tanto $\begin{cases}-2x+y&=1\\2x\quad-3z+w&=0\end{cases}$

$$P=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \begin{bmatrix}-2&1&0&0\\2&0&-3&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$





## 7 Un problema de Microeconomía

Resuelva $Y$ en términos de $X$ para obtener la FPP

$$\begin{cases}X&&=4L_x\\&Y&=3L_y\\&&L_x+L_y=80\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}X&-4L_x&=0\\Y&&-3L_y=0\\&L_x+&L_y=80\end{cases}$$

("en términos de" $X$ significa $X$ libre)

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-4&0&0\\0&1&0&-3&0\\0&0&1&1&-80\\\hline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(3)\mathbf{2}+\mathbf{4}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(4)\mathbf{1}+\mathbf{3}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&-80\\\hline 1&0&4&0&0\\0&1&0&3&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(80)\mathbf{3}+\mathbf{5}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(-1)\mathbf{3}+\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\\hline 1&0&4&-4&320\\0&1&0&3&0\\0&0&1&-1&80\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\L_x\\L_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}320\\0\\80\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-4\\3\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow a=L_y\Rightarrow\begin{pmatrix}X\\Y\\L_x\\L_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}320-4L_y\\3L_y\\80-L_y\\L_y\end{pmatrix}$$ "en términos de" $L_y$





## 8 Variable libre

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\\hline 1&0&4&-4&320\\0&1&0&3&0\\0&0&1&-1&80\\0&0&0&1&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[{[(-320)\mathbf{4}+\mathbf{5}]}]{\overset{\boldsymbol{\tau}}{[(\frac{-1}{4})\mathbf{4}]}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\\hline 1&0&4&1&0\\0&1&0&-3/4&240\\0&0&1&1/4&0\\0&0&0&-1/4&80\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\L_x\\L_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\240\\0\\80\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\Rightarrow a=X\Rightarrow\begin{pmatrix}X\\Y\\L_x\\L_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\240-\frac{3}{4}X\\\frac{1}{4}X\\80-\frac{1}{4}X\end{pmatrix}$$

"en términos de" $X$

## 9 Variables libres

$$\begin{cases} x+2y-\;z+\;w=-1\\ -x-2y+3z+5w=-5\\ -x-2y-\;z-7w=7 \end{cases}$$

1. Resuelva en función de $y$ y $w$
2. Resuelva en función de $x$ y $w$
3. Resuelva en función de $x$ y $z$
4. Resuelva en función de $x$ y $y$





$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&-1&1&-1\\ -1&-2&3&5&-5\\ -1&-2&-1&-7&7\\ \hline 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[{[(1)\mathbf{1+5}]}]{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-2)\mathbf{1+2}]\\ [(1)\mathbf{1+3}]\\ [(-1)\mathbf{1+4}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ -1&0&2&6&-6\\ -1&0&-2&-6&6\\ \hline 1&-2&1&-1&1\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(-3)\mathbf{3+4}]\\ [(3)\mathbf{3+5}]}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&0\\ -1&0&2&0&0\\ -1&0&-2&0&0\\ \hline 1&-2&1&-4&4\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&-3&3\\ 0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$





$$\left[\begin{array}{cc|c} -2&-4&4\\ 1&0&0\\ 0&-3&3\\ 0&1&0 \end{array}\right] \begin{cases} \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{1}]\\ [(4)\mathbf{1+2}]\\ [(-4)\mathbf{1+3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1&0&0\\ \frac{-1}{2}&-2&2\\ 0&-3&3\\ 0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(1)\mathbf{2+3}]\\ [(\frac{-1}{3})\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1&0&0\\ \frac{-1}{2}&\frac{2}{3}&0\\ 0&1&0\\ 0&\frac{-1}{3}&1 \end{array}\right] \\[2em] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{1}]\\ [(4)\mathbf{1+2}]\\ [(-4)\mathbf{1+3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1&0&0\\ \frac{-1}{2}&-2&2\\ 0&-3&3\\ 0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau}\\ [(\frac{-1}{2})\mathbf{2}]\\ [(\frac{1}{2})\mathbf{2+1}]\\ [(-2)\mathbf{2+3}]}} \left[\begin{array}{cc|c} 1&0&0\\ 0&1&0\\ \frac{3}{4}&\frac{3}{2}&0\\ \frac{-1}{4}&\frac{-1}{2}&1 \end{array}\right] \end{cases}$$





## Problemas de la Lección 12

(L-12) Problema 1.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_P=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}_Q=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

(b) Encuentre una representación implícita de la recta anterior.

(L-12) Problema 2.

(a) Encuentre una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_P=(1,\quad -3,\quad 1,)$ y $\boldsymbol{x}_Q=(-2,\quad 4,\quad 5,)$.

(b) Encuentre una representación implícita (ecuaciones Cartesianas) de la recta.

(L-12) Problema 3.

(a) Ecuación paramética de la recta paralela a $2x-3y=5$ que pasa por el punto $(1,1)$.

(b) Encuentre una representación implícita de la recta.

(L-12) Problema 4.

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $(0,\quad 1,\quad 1,)$ y tiene por vectores directores $(0,\quad 1,\quad 2,)$ y $(1,\quad 1,\quad 0,)$

(b) Escriba la ecuación implicita del mismo plano.

(L-12) PROBLEMA 5.

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $(2, \quad 1, \quad 3,)$ y es perpendicular a $(3, \quad 1, \quad 1,)$.

(b) Escriba la ecuación implicita del mismo plano.

(L-12) PROBLEMA 6. Considere el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) ($1^{\text{pts}}$) Obtenga la solución al sistema.

(b) ($0.5^{\text{pts}}$) Explique por qué el conjunto de vectores solución al sistema anterior es una recta en $\mathbb{R}^5$. Indique un vector director y un punto por el que pasa la recta.

(c) ($1^{\text{pts}}$) Encuentre los vectores perpendiculares al vector director anterior. Pruebe que el conjunto de vectores perpendiculares a dicho vector forman un subespacio vectorial de dimensión 4. Encuentre una base de dicho subespacio.





## 1 Esquema de la **Lección 13**

### Esquema de la Lección 13

- Proyecciones
- Matrices proyección





## 2 Suma directa de subespacios

$\mathbb{R}^n$ es *suma directa* de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $\qquad (\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$

si todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tiene una descomposición **única** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$,

con $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$.

**Ejemplo** $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)}$

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^3; \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ \exists c_1, c_2, c_3 \ \Big|\ \boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

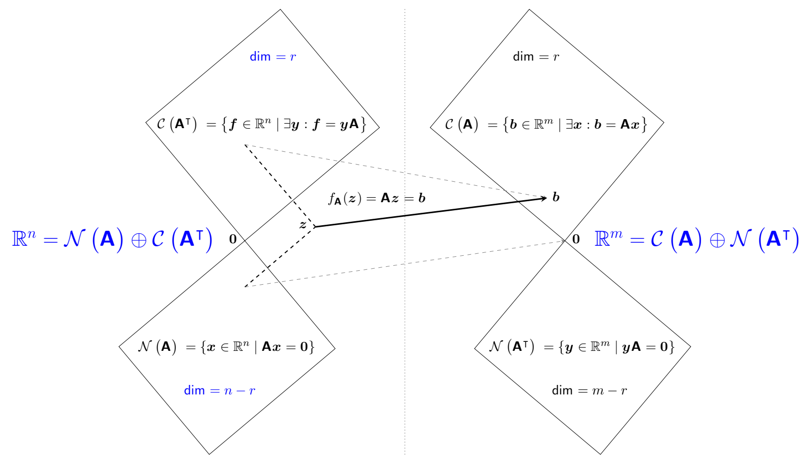
donde $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$ y $\boldsymbol{b} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right)$.

También $\boxed{\mathbb{R}^m = \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \oplus \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)}$





## 3 El gran esquema: suma directa de complementos ortogonales




$$\mathcal{C}\left(\mathbf{A}^\intercal\right) \perp \mathcal{N}\left(\mathbf{A}\right) \qquad \mathcal{C}\left(\mathbf{A}\right) \perp \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^\intercal\right)$$

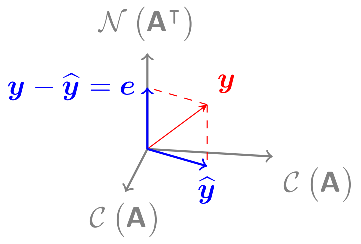
$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{x}$$

## 4 Proyección ortogonal sobre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$; como $\mathbb{R}^m = \mathcal{C}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$, para todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{y} = \widehat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{e}; \qquad (\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}})$$

con $\boxed{\widehat{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}) \text{ y } \boldsymbol{e} \perp \widehat{\boldsymbol{y}}}$, así que $\boldsymbol{e} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$.




¿Cómo calcular $\widehat{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$?





## 5 Ecuaciones normales

Sea $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$. Buscamos la descomposición $\boxed{\boldsymbol{y} = \widehat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{e}}$ donde

$$\widehat{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{C}(\mathbf{A}) \quad \text{y} \quad (\widehat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}) \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$$

Por tanto

$$\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{y}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}) \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$$

Es decir

$$\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^\intercal(\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}}$$

¡Sistemas equivalentes! $\Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}) \Rightarrow \operatorname{rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{rg}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})$

$\boxed{\text{solución única } \widehat{\boldsymbol{x}} \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \text{ tiene columnas independientes}}$





## 6 Solución a las ecuaciones normales (rango completo por columnas))

$\boxed{\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}}$ ($\mathbf{A}$ de rango completo por columnas)

**La solución** $\widehat{\boldsymbol{x}} = (\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$

**La proyección** $\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$

**La matriz de proyección** $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{P}\boldsymbol{y}$$

$\mathbf{P}$: Simétrica e idempotente.

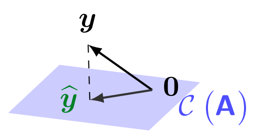




## 7 Matriz proyección

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\intercal}$$

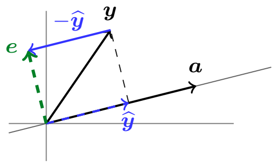
La proyección $\mathbf{P}\boldsymbol{y}$ *es el punto* $\widehat{\boldsymbol{y}}$ *de* $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ *más próximo a* $\boldsymbol{y}$




Casos extremos:

- Si $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{P}\boldsymbol{y} =$
- Si $\boldsymbol{y} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{P}\boldsymbol{y} =$

## 8 Proyección sobre una recta




recta$= \mathcal{C}(\mathbf{A})$; $\mathbf{A} = [\boldsymbol{a}]$; $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$

Queremos encontrar el punto $\widehat{\boldsymbol{y}}$ sobre la linea más próximo a $\boldsymbol{y}$

$\widehat{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{C}([\boldsymbol{a}]) \quad \perp \quad \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{N}([\boldsymbol{a}]^\intercal)$.

$\widehat{\boldsymbol{y}}$ es algún múltiplo de $\boldsymbol{a}$: $\quad \widehat{\boldsymbol{y}} = [\boldsymbol{a}](\widehat{x},)$

**Cómo:** $\quad [\boldsymbol{a}]^\intercal [\boldsymbol{a}] \widehat{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{a}]^\intercal \boldsymbol{y}$

**La solución** $\quad \widehat{\boldsymbol{x}} = \left([\boldsymbol{a}]^\intercal [\boldsymbol{a}]\right)^{-1} [\boldsymbol{a}]^\intercal \boldsymbol{y}$

**La proyección** $\quad \widehat{\boldsymbol{y}} = [\boldsymbol{a}] \widehat{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{a}] \left([\boldsymbol{a}]^\intercal [\boldsymbol{a}]\right)^{-1} [\boldsymbol{a}]^\intercal \boldsymbol{y}$

**La matriz de proyección** $\quad \mathbf{P} = [\boldsymbol{a}] \left([\boldsymbol{a}]^\intercal [\boldsymbol{a}]\right)^{-1} [\boldsymbol{a}]^\intercal$



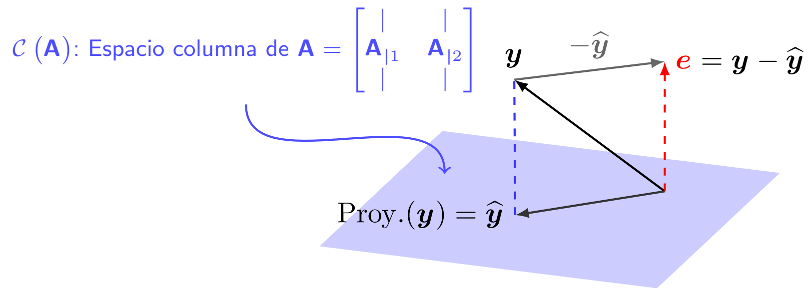


## 9 Proyección sobre un plano

¿Por qué proyectar?

Así que resolveremos

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \Big(\text{Proy. de } \boldsymbol{y} \text{ sobre } \mathcal{C}(\mathbf{A})\Big).$$



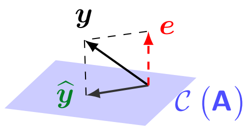

$(\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}) \qquad$ . . . ese es el hecho fundamental.





## 10 Ecuaciones normales

¿Qué es la proyección de $\boldsymbol{y}$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{A}_{|1} & \mathbf{A}_{|2} \\ | & | \end{bmatrix}$?




$$\widehat{\boldsymbol{y}} = (\mathbf{A}_{|1})\widehat{x_1} + (\mathbf{A}_{|2})\widehat{x_2} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$$

*"Encontrar una combinación de columnas tal que $\boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A})$"*

$$\boldsymbol{e} \perp \mathcal{C}(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e} \in$$

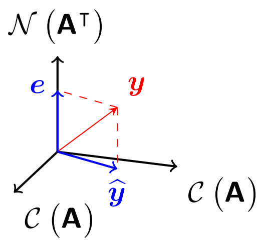
$$\mathbf{A}^\intercal \boldsymbol{e} = \mathbf{A}^\intercal(\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}) \quad = \quad \mathbf{A}^\intercal(\boldsymbol{y} - \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal \boldsymbol{y}}$$





## 11 Dos proyecciones

$\boldsymbol{y}$ tiene un componente $\widehat{\boldsymbol{y}}$ en $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, y otro $\boldsymbol{e}$ en $\mathcal{C}(\mathbf{A})^\perp$.




$\widehat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{y}$

$\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{P}\boldsymbol{y} \qquad$ es la proyección sobre $\mathcal{C}(\mathbf{A})$

$\boldsymbol{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\boldsymbol{y} \qquad$ es la proyección sobre $\mathcal{C}(\mathbf{A})^\perp$

# Problemas de la Lección 13

(L-13) PROBLEMA 1. Proyecte el primer vector ($\boldsymbol{b}$) sobre la recta generada por el segundo vector ($\boldsymbol{a}$). Compruebe que $\boldsymbol{e}$ es perpendicular a $\boldsymbol{a}$. Encuentre la matriz proyección $\mathbf{P} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^\intercal[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^\intercal$ sobre la recta generada por cada vector $\boldsymbol{a}$. Verifique en cada caso que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Multiplique $\mathbf{P}\boldsymbol{b}$ en cada caso para calcular la proyección $\widehat{\boldsymbol{b}}$.

(a) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

(c) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

(d) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}3\\3\\12\end{pmatrix}$.

(Hefferon, 2008, ejercicio 1.6 del conjunto de problemas VI.1.)

(L-13) PROBLEMA 2. Proyecte ortogonalmente el vector sobre la recta.

(a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, La recta : $\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}$.

(b) $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, la recta descrita por la ecuación $y = 3x$.





(L-13) PROBLEMA 3. Aunque los dibujos nos han guiado el desarrollo del tema, no estamos restringidos a espacios que podamos dibujar. En $\mathbb{R}^4$ proyecte el vector sobre la recta.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix};\quad \left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^1,\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}\right\}.$$

(L-13) PROBLEMA 4.

(a) Proyecte el vector $\boldsymbol{b} = (1, \quad 1,)$ sobre las rectas generadas por $\boldsymbol{a}_1 = (1, \quad 0,)$ y $\boldsymbol{a}_2 = (1, \quad 2,)$. Sume las proyecciones: $\widehat{\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{b}_2}$. Las proyecciones no suman $\boldsymbol{b}$ porque los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ no son ortogonales.

(b) La proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre el plano generado por $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ será igual a $\boldsymbol{b}$. Encuentre $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$ para $\mathbf{A} = [\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2;]$.

(Strang, 2003, ejercicio 8–9 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) PROBLEMA 5.

(a) Si $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ demuestre que $(\mathbf{I}-\mathbf{P})^2 = \mathbf{I}-\mathbf{P}$. Cuando $\mathbf{P}$ proyecta sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$, $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$ proyecta sobre el ________.

(b) Si $\mathbf{P}^\intercal = \mathbf{P}$ demuestre que $(\mathbf{I}-\mathbf{P})^\intercal = \mathbf{I}-\mathbf{P}$.

(Strang, 2003, ejercicio 17 del conjunto de problemas 4.2.)





(L-13) PROBLEMA 6.

(a) Calcule las matrices proyección $\mathbf{P} = [\boldsymbol{a}]\left([\boldsymbol{a}]^\intercal[\boldsymbol{a}]\right)^{-1}[\boldsymbol{a}]^\intercal$ sobre las rectas que pasan por $\boldsymbol{a}_1 = (-1, \quad 2, \quad 2,)$ y $\boldsymbol{a}_2 = (2, \quad 2, \quad -1,)$. Compruebe que $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$. Multiplique esas matrices proyección y explique por qué su producto $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ es lo que es.

(b) Proyecte $\boldsymbol{b} = (1, \quad 0, \quad 0,)$ sobre las rectas generadas por $\boldsymbol{a}_1$, y $\boldsymbol{a}_2$ y también por $\boldsymbol{a}_3 = (2, \quad -1, \quad 2,)$. Sume las tres proyecciones $\widehat{\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{b}_2} + \widehat{\boldsymbol{b}_3}$.

(c) Encuentre la matriz proyección $\mathbf{P}_3$ sobre $\mathcal{L}([\boldsymbol{a}_3;]) = \mathcal{L}([(2, \quad -1, \quad 2,);])$. Verifique que $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{I}$. ¡La base $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ es ortogonal!

(Strang, 2003, ejercicio 5–7 del conjunto de problemas 4.2.)

(L-13) PROBLEMA 7. Proyecte $\boldsymbol{b}$ sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$ resolviendo $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ y después calculando $\widehat{\boldsymbol{b}} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$. Encuentre $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \widehat{\boldsymbol{b}}$.

(a) $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}$

(c) Calcule las matrices proyección $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ sobre los espacios columna. Verifique que $\mathbf{P}_1\boldsymbol{b}_1$ da la primera proyección $\widehat{\boldsymbol{b}_1}$. Verifique también que $(\mathbf{P}_2)^2 = \mathbf{P}_2$.

(Strang, 2003, ejercicio 11–12 del conjunto de problemas 4.2.)





Hefferon, J. (2008). *Linear Algebra*. Jim Hefferon, Colchester, Vermont USA. This text is Free. URL ftp://joshua.smcvt.edu/pub/hefferon/book/book.pdf

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.