

# Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

04/04/2024

Puede encontrar la última versión de este material en

<https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp>

– Marcos Bujosa. Copyright © 2008–2024

Algunos derechos reservados. Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

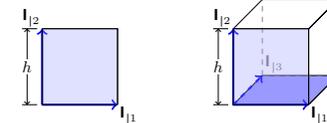
## 1 Esquema de la Lección 13

### Esquema de la Lección 13

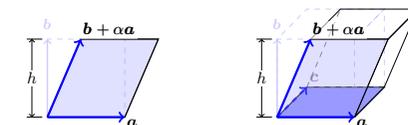
- Determinante:  $\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}|$  [ $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ]
  - Volumen vs determinante
  - Propiedades: [1](#), [2](#), [3](#)
- Deduciremos las propiedades: **4 – 9**

## 2 Superficie o Volumen

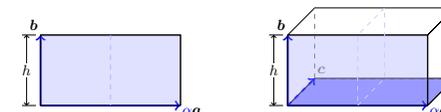
1.  $\text{Vol}(\mathbf{I}_{n \times n}) = 1.$



2.  $\text{Vol}(\mathbf{A}) = \text{Vol}(\mathbf{A}_{[(\alpha)k+j]})$  para  $j \neq k.$



3.  $|\alpha| \cdot \text{Vol}(\mathbf{A}) = |\alpha| \cdot \text{Vol}[\dots; \mathbf{A}|_k; \dots] = \text{Vol}[\dots; \alpha \mathbf{A}|_k; \dots]$



**3** Determinante: 3 propiedades que lo definen

**P-1**

**Determinante de las matrices identidad:**

$$\det \mathbf{I}_{n \times n} = 1$$

**P-2**

**Transf. elem. Tipo I no cambian el determinante:**

$$\det \mathbf{A} = \det \left( \mathbf{A}_{[(\alpha)\tau, k+j]} \right)$$

**P-3**

**Multiplicar una columna multiplica el determinante**

$$\alpha \cdot \det \mathbf{A} = \det [\dots; \alpha \mathbf{A}_{|k}; \dots] \text{ para cualquier } k \in \{1 : n\} \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}$$

Valor absoluto de  $\det \mathbf{A} = \text{Vol } \mathbf{A}$

### Ejemplo

Para  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{vmatrix} a_1 & (b_1 + \alpha c_1) & c_1 \\ a_2 & (b_2 + \alpha c_2) & c_2 \\ a_3 & (b_3 + \alpha c_3) & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\det [\mathbf{a}; (\mathbf{b} + \alpha \mathbf{c}); \mathbf{c};] = \det [\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c};];$$

y también

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha b_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha b_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\det [\mathbf{a}; \alpha \mathbf{b}; \mathbf{c};] = \alpha \det [\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c};];$$

**4** Determinante de una matriz con una columna nula

**P-4**

**Det. de una matriz con una columna de ceros**

Si  $\mathbf{A}$  tiene una columna de ceros  $\mathbf{0}$ , entonces

$\det(\mathbf{A}) = 0$

Demuestre **P-4**

**5** Matrices elementales

Ya sabemos que

$$\det \left( \mathbf{A}_{[(\alpha)\tau, k+j]} \right) = |\mathbf{A}|; \quad \det \left( \mathbf{A}_{[(\alpha)k]} \right) = \alpha |\mathbf{A}|.$$

**Determinante de matrices elementales**

$$\det \left( \mathbf{I}_{[(\alpha)\tau, k+j]} \right) = 1 \quad \text{y} \quad \det \left( \mathbf{I}_{[(\alpha)j]} \right) = \alpha.$$

Así, puesto que  $\mathbf{A}_{\tau} = \mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau})$ , entonces

$$|\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau})| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{I}_{\tau}| \quad (1)$$

donde  $\mathbf{I}_{\tau}$  es una matriz elemental

**EJERCICIO 1.** Demuestre las siguientes proposiciones

(a)  $\det(\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k}) = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{I}_{\tau_1}| \cdots |\mathbf{I}_{\tau_k}|$ .

(b) Si  $\mathbf{B}$  es de rango completo, es decir, si  $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}$ , entonces  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{I}_{\tau_1}| \cdots |\mathbf{I}_{\tau_k}|$ , y por tanto  $|\mathbf{B}| \neq 0$ .

(c) Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son de orden  $n$ , y  $\mathbf{B}$  es de rango completo entonces

$$\det(\mathbf{AB}) = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \quad (2)$$

## 6 Determinante tras una sucesión de transformaciones elementales

### Ejemplo

Una sucesión  $\tau_1 \cdots \tau_k$  de transformaciones *Tipo I* de la matriz  $\mathbf{A}$  no altera el determinante.

$$|\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k}| = |\mathbf{A}(\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k})| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}| = |\mathbf{A}| \cdot 1 = |\mathbf{A}|$$

### Ejemplo

Pero si lo puede hacer una sucesión de transformaciones *Tipo II*.

$$\begin{vmatrix} 2a & 3c \\ 2b & 3d \end{vmatrix} = ? \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

## 7 Propiedad antisimétrica

### P-5 [Propiedad antisimétrica]

Intercambiar dos columnas cambia el signo del determinante.

#### Demostración.

Un intercambio de columnas es una sucesión de transformaciones elementales *Tipo I* y una única de *Tipo II* que multiplica por  $-1$  una columna □

Así que:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

## 8 Matrices singulares. Matrices inversas

**P-6** Si  $\mathbf{A}$  es singular entonces  $|\mathbf{A}| = 0$ .

**P-7**  $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$ .

#### Demostración.

Sea  $\mathbf{A}_{\tau_1 \dots \tau_k} = \mathbf{R}$  escalonada reducida (y  $\mathbf{E} = \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}$ ).

Como  $\mathbf{AE} = \mathbf{R}$ , entonces:  $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = |\mathbf{R}|$ ; con solo dos casos:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \text{ singular } (\mathbf{R}|_n = \mathbf{0}) : & |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = 0 \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \\ \mathbf{A} \text{ no singular } (\mathbf{R} = \mathbf{I}) : & |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{E}| = 1 \Rightarrow |\mathbf{E}| = |\mathbf{A}^{-1}| = (|\mathbf{A}|)^{-1} \end{cases}$$

□

**Ejemplo**

Para  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo I}]{[(-2)\tau_1+2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{[(-1/2)\tau_2]} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo I}]{[(-2)\tau_2+1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \left| \mathbf{I}_{[(-2)\tau_1+2]} \right| \cdot \left| \mathbf{I}_{[(-1/2)\tau_2]} \right| \cdot \left| \mathbf{I}_{[(-2)\tau_2+1]} \right| = 1 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 1 = \frac{-1}{2};$$

es decir

$$|\mathbf{A}| = -2.$$

11/23

**EJERCICIO 2. [Matrices transpuestas]**

(a) ¿Qué relación hay entre el determinante de una matriz elemental  $\mathbf{I}_\tau$  y el determinante de su transpuesta  ${}_\tau\mathbf{I}$ ?

(b) Sea  $\mathbf{B}$  de rango completo, demuestre que  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}^\top|$ .

12/23

**9** Determinante de un producto de matrices**P-8** [Determinante del producto de matrices]

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}). \quad (3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B} \text{ singular, también lo es } \mathbf{AB} \Rightarrow \det(\mathbf{AB}) = 0 = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \\ \mathbf{B} = \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \Rightarrow \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \end{cases}$$

11/23

**10** Determinante de la transpuesta**P-9** Determinante de la transpuesta

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^\top|.$$

Demostración.

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{A} \text{ singular: } & \mathbf{A}^\top \text{ singular} \Rightarrow \det \mathbf{A}^\top = \det \mathbf{A} = 0 \\ \text{si } \mathbf{A} \text{ NO singular: } & \mathbf{A} = \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \Rightarrow \det \mathbf{A}^\top = \det \mathbf{A} \end{cases}$$

□

12/23

## Problemas de la Lección 13

(L-13) **PROBLEMA 1.** Complete las demostraciones (los EJERCICIOS) de esta lección.

(L-13) **PROBLEMA 2.** Sabiendo que el determinante del producto de dos matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  cualesquiera es  $|\mathbf{BC}| = |\mathbf{B}||\mathbf{C}|$ ; demuestre que para toda matriz  $\mathbf{A}$  invertible (y por tanto con  $\det \mathbf{A} \neq 0$ )

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}.$$

(L-13) **PROBLEMA 3.** Sean  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tales que  $\det(\mathbf{A}) = 2$  y  $\det(\mathbf{B}) = -2$

- (a) (0.5pts) Calcule los determinantes de  $\mathbf{A}(\mathbf{B})^2$  y  $(\mathbf{AB})^{-1}$   
 (b) (0.5pts) ¿Es posible calcular el rango de  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ? ¿y de  $\mathbf{AB}$ ?

(L-13) **PROBLEMA 4.** Aplique el método de Gauss-Jordan para calcular el determinante de las siguientes matrices

(a)  $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$   
 (b)  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

12/23

(c)  $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(L-13) **PROBLEMA 5.** La matriz  $\mathbf{A}$  de orden 3 por 3 se reduce a la matriz identidad  $\mathbf{I}$  mediante las siguientes tres operaciones elementales sobre las columnas (en el siguiente orden):

$\tau_{[(-4)1+2]}$  : Resta 4 veces columna 1 de la columna 2.

$\tau_{[(-3)1+3]}$  : Resta 3 veces columna 1 de la columna 3.

$\tau_{[(-1)3+2]}$  : Resta columna 3 de la columna 2.

Calcule el determinante de  $\mathbf{A}$ .

(L-13) **PROBLEMA 6.**

(a) Calcule el determinante de  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Encuentre el determinante de  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$  por Gauss-Jordan.

12/23

## 1 Esquema de la Lección 14

### Esquema de la Lección 14

- Cálculo de  $|\mathbf{A}|$  por eliminación gaussiana
- **P-10** — Propiedad multilineal
- Desarrollo del determinante por cofactores (Expansión de Laplace).
- Aplicaciones de la función determinante
  - Regla de Cramer para la resolución de un sistema de ecuaciones
  - Cálculo de la inversa de una matriz

13/23

## 2 Matriz extendida

Matriz extendida de  $\mathbf{B}$  :  $\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

1. Dada  $\tau$ :  $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_\tau \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}_\tau$ .
2. Como  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}_\tau$  y  $\mathbf{I}_\tau$  Mat. Elem. mismo *tipo*  $\Rightarrow$  mismo *det.*

Aplicando 1.  $k$  veces y luego 2.

$$\left| \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\tau_1 \dots \tau_k} \right| = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\tau_1} \dots \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}_{\tau_k} \right| = |\mathbf{I}_{\tau_1}| \dots |\mathbf{I}_{\tau_k}| = |\mathbf{I}_{\tau_1 \dots \tau_k}|.$$

Si  $\mathbf{A}$  matriz extendida de  $\mathbf{B}$   $\begin{cases} \text{Si } \mathbf{B} \text{ singular} & |\mathbf{B}| = 0 = |\mathbf{A}| \\ \text{Si } \mathbf{B} \text{ invertible} & |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \end{cases}$

14/23

### EJERCICIO 7. [Matrices triangulares]

- (a) ¿Cómo es el determinante de una matriz triangular inferior **L** de rango completo?
- (b) ¿Cuál es el determinante de una matriz cuadrada y triangular con algún elemento nulo en su diagonal?
- (c) ¿Cómo es el determinante de una matriz triangular superior? **U**

$$\text{Además } \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix}_{\begin{matrix} m \times n \\ n \times m \end{matrix}} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

15/23

### 3 Cálculo por eliminación Gaussiana

#### Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} : \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{[(-5)1+2]} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \end{array} \right] \quad |\mathbf{A}| = -7$$

#### Ejemplo

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} [(2)3] \\ [(-1)2+3] \\ [(\frac{1}{2})4] \end{matrix}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} [1 \leftrightarrow 2] \\ [(-1)4] \end{matrix}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9,$$

15/23

Matrices de orden 1,  $\mathbf{A} = [a]$  :

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}| = a.$$

Matrices de orden 2:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(-\frac{b}{a})1+2]} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ c & d - \frac{bc}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = ad - bc = a \det [d] - b \det [c].$$

Matrices de orden 3:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [(-\frac{b}{a})1+2] \\ [(-\frac{c}{a})1+3] \end{matrix}} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ d & e - \frac{bd}{a} & f - \frac{cd}{a} & 0 \\ g & h - \frac{bg}{a} & i - \frac{cg}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[(\frac{-af+cd}{ae-bd})2+3]} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ d & e - \frac{bd}{a} & f - \frac{cd}{a} & 0 \\ g & h - \frac{bg}{a} & i - \frac{cg}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ d & e - \frac{bd}{a} & 0 & 0 \\ g & h - \frac{bg}{a} & \frac{aei-afh-bdi+bfh+cdh-ceg}{ae-bd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \underbrace{aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg}_{\text{(Regla de Sarrus)}} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

16/23

Matrices de orden 4:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & 0 \\ e & f & g & h & 0 \\ i & j & k & l & 0 \\ m & n & o & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [(-\frac{b}{a})1+2] \\ [(-\frac{c}{a})1+3] \\ [(-\frac{d}{a})1+4] \\ [(\frac{-ag+ce}{af-be})2+3] \\ [(\frac{-ah+de}{af-be})2+4] \\ [(\frac{-af+ahj+bel-bhi-dej+dfi}{afk-agj-bek+bgi+cej-cfi})3+4] \end{matrix}} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f - \frac{be}{a} & 0 & 0 & 0 \\ i & j - \frac{bi}{a} & \frac{afk-agj-bek+bgi+cej-cfi}{af-be} & 0 & 0 \\ m & n - \frac{bm}{a} & \frac{afk-agj-bek+bgi+cej-cfi}{af-be} & p + \frac{(-l + \frac{(h-de)(j-bi)}{f-\frac{bc}{a}} + \frac{di}{a}) \left( -o + \frac{(g-ce)(n-\frac{hm}{a}) + cm}{f-\frac{bc}{a}} \right) - \frac{(h-\frac{de}{a})(n-\frac{hm}{a})}{f-\frac{bc}{a}} - \frac{dm}{a}}{-k + \frac{(g-ce)(j-\frac{bi}{a})}{f-\frac{bc}{a}} + \frac{ci}{a}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = afkp - aflo - agjp + agln + ahjo - ahkn - bekp + belo + bgip - bglm - bhio + bhkm + cejp - celn - cfip + cflm + chin - chjm - dejo + dekn + dfio - dfkm - dgin + dgjm$$

$$= a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

17/23

#### 4 Propiedad multilineal

##### P-10 Propiedad multilineal

$$\det [\dots; (\beta \mathbf{b} + \psi \mathbf{c}); \dots] = \beta \det [\dots; \mathbf{b}; \dots] + \psi \det [\dots; \mathbf{c}; \dots]$$

##### Ejemplo

Para  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{vmatrix} a + \alpha & c \\ b + \beta & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & c \\ \beta & d \end{vmatrix};$$

es decir

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & c \\ & d \end{vmatrix}.$$

18 / 23

#### 5 menores y cofactores

##### Definición menores y cofactores

Denotamos la **submatriz resultante de eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$**  con

$${}^i \mathbf{A}^j.$$

Su determinante  $\det({}^i \mathbf{A}^j)$ , se denomina **menor** de  $a_{ij}$ .

Los menores con los signos alternados en función de si  $(i + j)$  es par (en cuyo caso el signo no cambia) o impar (en cuyo caso se invierte el signo) se denominan **cofactores**.

Así, el cofactor de  $a_{ij}$  es

$$\text{cof}_{ij}(\mathbf{A}) = (-1)^{i+j} \det({}^i \mathbf{A}^j).$$

19 / 23

##### Ejemplo

Para  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ , tenemos

$${}^1 \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad {}^3 \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

así

$$\text{cof}_{12}(\mathbf{A}) = (-1)^{1+2} \det({}^1 \mathbf{A}^2) = (-1) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

y

$$\text{cof}_{33}(\mathbf{A}) = (-1)^{3+3} \det({}^3 \mathbf{A}^3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

20 / 23

#### 6 Desarrollo del determinante por cofactores

##### Teorema [Expansión de Laplace]

Para cualquier matriz de orden  $n$ ,  $\det(\mathbf{A})$  se puede expresar como suma de los productos de los elementos de cualquier columna (fila) de  $\mathbf{A}$  por sus correspondientes cofactores:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \text{cof}_{ij}(\mathbf{A}), \quad \text{expansión por la columna } j\text{-ésima}$$

o bien

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{cof}_{ij}(\mathbf{A}), \quad \text{expansión por la fila } i\text{-ésima}$$

21 / 23

EJERCICIO 8. Calcule  $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

22/23

### 8 Cálculo de la inversa de una matriz

$$[\text{Adj}(\mathbf{A})] \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \text{cof}_{11}(\mathbf{A}) & \text{cof}_{21}(\mathbf{A}) & \cdots & \text{cof}_{n1}(\mathbf{A}) \\ \text{cof}_{12}(\mathbf{A}) & \text{cof}_{22}(\mathbf{A}) & \cdots & \text{cof}_{n2}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cof}_{1n}(\mathbf{A}) & \text{cof}_{2n}(\mathbf{A}) & \cdots & \text{cof}_{nn}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}$$

23/23

### 7 Regla de Cramer

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad |\mathbf{A}| \neq 0 \quad \text{entonces}$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{A}_{|1})x_1 + \cdots + (\mathbf{A}_{|j})x_j + \cdots + (\mathbf{A}_{|n})x_n.$$

$$\det[\mathbf{A}_{|1}; \dots; \overbrace{\mathbf{b}}^{\text{pos. } j}; \dots; \mathbf{A}_{|n}] = x_j \cdot \det(\mathbf{A}).$$

$$x_j = \frac{\det[\mathbf{A}_{|1}; \dots; \overbrace{\mathbf{b}}^{\text{pos. } j}; \dots; \mathbf{A}_{|n}]}{\det(\mathbf{A})}.$$

Problemas computacionales cuando  $\det \mathbf{A} \simeq 0$  (ángulo pequeño entre vectores)

22/23

### Problemas de la Lección 14

(L-14) PROBLEMA 1. Complete las demostraciones (los EJERCICIOS) de esta lección.

(L-14) PROBLEMA 2. Sea  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{|1}; \mathbf{A}_{|2}; \mathbf{A}_{|3}]$  con  $\det \mathbf{A} = 2$ .

(a) Calcule  $\det(2\mathbf{A})$  y  $\det \mathbf{A}^{-1}$

(b) Calcule  $\det[(3\mathbf{A}_{|1} + 2\mathbf{A}_{|2}); \mathbf{A}_{|3}; \mathbf{A}_{|2}]$

(L-14) PROBLEMA 3. El determinante de una matriz  $\mathbf{A}$  de orden  $n$  por  $n$  es 12 (donde  $n$  es un múltiplo de dos). ¿Cuál es el determinante de  $-\mathbf{A}^T$ ? (Justifique su respuesta).

(MIT Course 18.06 Quiz 2, Fall, 2008)

(L-14) PROBLEMA 4. Sea  $\mathbf{A}$  una matriz cuadrada. Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación (puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o no de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos).

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|^2.$$

(L-14) PROBLEMA 5. Tenemos una matriz de orden  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$  con

$\det \mathbf{A} = 3$ . Calcule el determinante de las siguientes matrices:

23/23

- (a) (0.5 pts)  $\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b-4 & 3 & 4 \\ c-6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
- (b) (0.5 pts)  $\begin{bmatrix} 7a & 7 & 14 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$
- (c) (1 pts)  $(2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
- (d) (0.5 pts)  $\begin{bmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ b & 3 & 4 \\ c & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(L-14) PROBLEMA 6.

(a) Escalone la matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ .

(b) ¿Es  $\mathbf{A}$  invertible?

(c) En caso afirmativo calcule  $|\mathbf{A}^{-1}|$ ; en caso contrario calcule  $|\mathbf{A}|$

(d) La matriz  $\mathbf{C}$  es igual al producto de  $\mathbf{A}$  con la *traspuesta* de la matriz  $\mathbf{B}$ , es decir

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T \quad \text{donde} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

¿Cuánto vale el determinante de  $\mathbf{C}$ ? ¿Es  $\mathbf{C}$  invertible?

23/23

(L-14) PROBLEMA 7. Calcule el determinante de las siguientes matrices empleando la expansión de Laplace.

- (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$
- (b)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
- (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(L-14) PROBLEMA 8. Calcule el siguiente determinante empleando la expansión de Laplace:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

(L-14) PROBLEMA 9. Calcule  $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

23/23

(L-14) PROBLEMA 10. Calcule el determinante de la siguiente matriz empleando la expansión de Laplace

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

(L-14) PROBLEMA 11. Suponga la matriz  $\mathbf{A}_n$  de dimensiones  $n$  por  $n$  que tiene tres en su diagonal y doses inmediatamente debajo de la diagonal y en la posición  $(1, n)$ ; por ejemplo, para  $n = 4$ :

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Encuentre, empleando los cofactores de la primera fila, el determinante de  $\mathbf{A}_4$ .
- (b) Encuentre el determinante de  $\mathbf{A}_n$  para  $n > 4$ .

23/23

(L-14) PROBLEMA 12. Si tiene una matriz por bloques

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Demuestre que  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}||\mathbf{C}|$ .

*Pista*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

(L-14) PROBLEMA 13. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales, aplicando la regla de Cramer.

- (a)  $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$
- (b)  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

(ejercicio 13 del conjunto de problemas 4.4 de Strang (2007))

23/23

(L-14) PROBLEMA 14. Encuentre la inversa de las siguientes matrices empleando la matriz adjunta.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ejercicio 18 del conjunto de problemas 4.4 de Strang (2007))

(L-14) PROBLEMA 15. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{y el vector } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (0.5pts) Calcule los valores de  $a$  para los que  $\mathbf{A}$  es invertible.

(b) (1pts) Considere  $a = 5$ . Usando la regla de Cramer calcule la cuarta coordenada  $x_4$  de la solución al sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

(c) (1pts) Calcule  $\mathbf{B}^{-1}$ . Use dicha matriz para resolver el sistema  $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ .

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomson Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.