Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

11/04/2024

Puede encontrar la última versión de este material en

https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp

1 Esquema de la **Lección 15**

Matrices siempre cuadradas en este tema

Esquema de la Lección 15

- **Autovalores, autovectores** (eigen, característicos, propios)
- $\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right|=0$ *ecuación característica*
- $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$, $\det\mathbf{A}$ (demo en la próxima lección)

2 Autovalores y autovectores

Considere la ecuación

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \qquad (\text{con}\quad \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0})$$

- *Autovalor* es cualquier λ para el que existan soluciones.
- Dichas soluciones *no nulas* $\boldsymbol{x}$ se llaman *autovectores*.
  $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ tales que $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es un múltiplo de $\boldsymbol{x}$

Cuando λ es 0, ¿quienes son los auto-vectores?

3 Un ejemplo: matriz de proyección

- Proyección ortogonal
- ¿Qué vectores son autovectores?
  ¿qué vectores quedan en la misma dirección?
- ¿Cuanto valen sus autovalores?
- ¿Hay más autovectores? ¿Con qué autovalor?
- Dos autoespacios

4 Otro ejemplo: matriz intercambio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Un vector que no cambie tras el intercambio?
- ¿Cuál es su autovalor?
- ¿Algún autovector asociado a $\lambda_2 = -1$?

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_2$$

Nótese: $\operatorname{tr}\big(\mathbf{A}\big) = 0 = \lambda_1 + \lambda_2; \qquad \det \mathbf{A} = -1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$

5 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

¿Cómo resolver

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \overbrace{\lambda}^{?}\overbrace{\boldsymbol{x}}^{?}\ ?$$

Reescribamos ...

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x} =$$

idea Para que esto ocurra ¿cómo debe ser la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$?

¿Cuánto debe valer el determinante? $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| =$

6 ¿Cómo calcular los autovalores y los autovectores?

1. Autovalores son los λ's tales que: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| =$
   (Polinomio característico $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$)
2. ¿Cómo calcular los $\boldsymbol{x}$ tales que $\big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\big)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?

Autoespacio (conjunto de autovectores + $\mathbf{0}$):

$$\mathcal{E}_{\lambda}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \right\}$$

Espectro: conjunto $\{\lambda_1, \dots \lambda_k\}$ de autovalores $\big($raíces de $P_{\mathbf{A}}(\lambda)\big)$

7 Ejemplo (¡primero los autovalores!)

Buscamos determinante nulo (Polinomio característico)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

Nótese: $\operatorname{tr}\big(\mathbf{A}\big) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2; \qquad \det \mathbf{A} = 8 = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$

8 Ejemplo (después los autoespacios)

y ahora calculamos el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ ... para cada λ.

Para $\lambda_1 = 4$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Para $\lambda_2 = 2$

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

¿Son los dos únicos autovectores?

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda\boldsymbol{x}_i; \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_i = \lambda\boldsymbol{x}_i.$$

9 Otro ejemplo: Matriz rotación 90º

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Cuanto suman los autovalores?
- ¿Cuanto vale el determinante?

Dificultades

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ $\qquad (+)\cdot(-) = (+)$?

¿Qué vector es paralelo a si mismo tras una rotación de 90º?

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 =$$

10 Ejemplos aún peores

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Autovalores

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

- Autovectores
  - para λ_1: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1; \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - para λ_2:

$\lambda = 3$ está repetido dos veces, pero $\dim \mathcal{E}_3(\mathbf{A}) = 1$

$$\mu(3) = 2 \neq 1 = \gamma(3)$$

Resumen:

1. Los autovalores λ son aquellos que hacen singular a la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, es decir, son las raíces del polinomio característico: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.
2. Una matriz de orden $n \times n$ tiene polinomio caracteristico de grado n
3. Un polinomio de grado n tiene n raíces (quizá algunas raíces repetidas)
4. La suma de los autovalores es igual a la suma de los elementos de la diagonal de la matriz (traza)
5. El producto de los autovalores es igual al determinante
6. Los autovectores asociados a λ son los vectores no nulos de $\mathcal{N}\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)$.

Problemas de la Lección 15

(L-15) Problema 1. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Los autovalores de $\mathbf{A}$ son -1, 1 y 2; y dos auto-vectores son

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Compruebe que estos vectores son efectivamente auto-vectores de $\mathbf{A}$. ¿Cuales son sus correspondientes autovalores?

(b) Encuentre un tercer auto-vector correspondiente al tercer auto-valor.

(L-15) Problema 2. Encuentre los valores y vectores característicos de

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 12 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) Problema 3. Si $\mathbf{B}$ tiene autovalores $1, 2, 3$, $\mathbf{C}$ tiene autovalores $4, 5, 6$, y $\mathbf{D}$ tiene autovalores $7, 8, 9$, ¿Qué autovalores tiene la matriz de orden 6 por 6 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$? donde $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ son matrices triangulares superiores.
(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) Problema 4. Encuentre los autovalores y autovectores de las siguientes matrices

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) Problema 5. Los autovalores de $\mathbf{A}$ son iguales a los autovalores $\mathbf{A}^\intercal$. Esto se debe a que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ es igual a $\det(\mathbf{A}^\intercal - \lambda\mathbf{I})$.

(a) Lo anterior es cierto porque ____________

(b) Demuestre con un ejemplo que, sin embargo, los auto-vectores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\intercal$ no son los mismos.

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) Problema 6. Sea $\mathbf{B}$ y un autovector $\boldsymbol{x}$ con autovalor asociado λ, es decir $\mathbf{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$; sea también $\mathbf{A} = (\mathbf{B} + \alpha\mathbf{I})$. Demuestre que $\boldsymbol{x}$ es también un autovector de $\mathbf{A}$, pero con el autovalor asociado $(\lambda + \alpha)$.

(L-15) Problema 7.

(a) Encuentre los autovalores y los auto-vectores de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Compruebe que la traza es igual a la suma de los autovalores, y que el determinante es igual a su producto.

(b) Si consideramos una nueva matriz, generada a partir de la anterior como

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 7\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

¿Cuáles son los autovalores y auto-vectores de la nueva matriz, y como están relacionados con los de $\mathbf{A}$?

(Strang, 2007, ejercicio 1 y 3 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 8. Suponga que λ es un auto-valor de $\mathbf{A}$, y que $\boldsymbol{x}$ es un auto-vector tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

(a) Demuestre que ese mismo $\boldsymbol{x}$ es un auto-vector de $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 7\mathbf{I}$, y encuentre el correspondiente auto-valor de $\mathbf{B}$.

(b) Suponga que $\lambda \neq 0$ (y que $\mathbf{A}$ es invertible), demuestre que $\boldsymbol{x}$ también es un auto-vector de $\mathbf{A}^{-1}$, y encuentre el correspondiente auto-valor. ¿Qué relación tiene con λ?

(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 9. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensiones $n \times n$, y que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. ¿Qué posibles valores pueden tomar los autovalores de $\mathbf{A}$?

(L-15) PROBLEMA 10. Suponga la matriz $\underset{3\times3}{\mathbf{A}}$ con autovalores 1, 2 y 3. Si $\boldsymbol{v}_1$ es un auto-vector asociado al auto-valor 1, $\boldsymbol{v}_2$ al auto-valor 2 y $\boldsymbol{v}_3$ al auto-valor 3; entonces ¿cuanto es $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3)$?

(L-15) PROBLEMA 11. Proporcione un ejemplo que muestre que los auto-valores pueden cambiar cuando un múltiplo de una columna se resta de otra. ¿Por qué los pasos de eliminación no modifican los autovalores nulos?
(Strang, 2007, ejercicio 6 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 12. El polinomio característico de una matriz $\mathbf{A}$ se puede factorizar como

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda).$$

Demuestre, partiendo de esta factorización, que el determinante de $\mathbf{A}$ es igual al producto de sus valores propios (autovalores). Para ello haga una elección inteligente del valor de λ.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 13. Calcule los valores característicos (autovalores o valores propios) y los vectores característicos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^2$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^2$ tiene los mismos ________ que $\mathbf{A}$. Cuando los autovalores de $\mathbf{A}$ son λ_1 y λ_2, los autovalores de $\mathbf{A}^2$ son ________.
(Strang, 2007, ejercicio 22 del conjunto de problemas 5.1.)

(L-15) PROBLEMA 14. Suponga que los valores característicos de $\underset{3\times3}{\mathbf{A}}$ son 1, 2 y 4, ¿cuál es la traza de $\mathbf{A}^2$? ¿Cuál es el determinante de $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\intercal}$?
(Strang, 2007, ejercicio 10 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-15) PROBLEMA 15. The equation $(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ has no solution for some right-hand side $\boldsymbol{b}$. Give as much information as possible about the eigenvalues of the matrix $\mathbf{A}$ (the matrix $\mathbf{A}$ is diagonalizable).

(L-15) PROBLEMA 16. You are given the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

One of the eigenvalues is $\lambda = 1$. What are the eigenvalues of $\mathbf{A}$? [Hint: Very little calculation required! You should be able to see another eigenvalue by inspection of the form of $\mathbf{A}$, and the third by an easy calculation. You shouldn't need to compute $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ unless you really want to do it the hard way.]

$\boxed{1}$ Esquema de la **Lección 16**

Esquema de la Lección 16

- Matrices semejantes: $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$
- Diagonalizando una matriz por bloques triangulares

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{bmatrix} \xrightarrow[esp(\tau_p^{-1}\cdots\tau_1^{-1})]{\tau_1\cdots\tau_p} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{S} \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \quad \mathbf{S} = \mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_p}.$$

- Matrices diagonalizables: cuando $\mathbf{C}$ es diagonal.

2 Matrices semejantes

Semejanza

A y **C** son semejantes si existe **S** invertible tal que

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

Si **A** y **C** son semejantes (*mirar demos en el libro*):

- Mismo determinante: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{C}$
- Mismo polinomio característico: $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}|$
- Mismos autovalores y con las mismas multiplicidades *algebraica* y *geométrica*.
- La misma traza.

Trans. Elem. inversas *espejo*: $\left(\mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k)}\right)^{-1} = {}_{esp(\boldsymbol{\tau}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{\tau}_1^{-1})}\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = {}_{\underset{[(-\alpha)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} = {}_{\underset{[(\frac{1}{\alpha})\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}}\mathbf{I}_{\underset{[(\alpha)\boldsymbol{j}]}{\boldsymbol{\tau}}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ similar a } {}_{esp(\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k)^{-1}}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\tau}_1\cdots\boldsymbol{\tau}_k}$$

3 Diagonalizando por bloques una matriz (matriz dentada)

Sea $\qquad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c||c} \mathbf{C} & \\ \hline * & \mathbf{L} \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{n\times n} \qquad$ donde

C (de orden m) es singular y **L** es triangular inferior e invertible; entonces existe **R** invertible tal que

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c||cccc} & 0 & & & & \\ \underset{m\times(m-1)}{*} & \vdots & & & & \\ & 0 & & & & \\ \hline & d_{m+1} & \beta_{m+1} & & & \\ & d_{m+2} & * & \beta_{m+2} & & \\ * & \vdots & * & * & \ddots & \\ & d_n & * & * & \cdots & \beta_n \end{array}\right]$$

$$\left(\cdots \underset{[(-\alpha_j)\boldsymbol{m+j}]}{\boldsymbol{\tau}} \cdots\right)\mathbf{A}\left(\cdots \underset{[(\alpha_j)\boldsymbol{j+m}]}{\boldsymbol{\tau}} \cdots\right); \qquad \boldsymbol{j} = 1, \dots, m-1.$$

4 Diagonalizando por bloques una matriz (matriz dentada)

Sea $\qquad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c||c} \mathbf{C} & \\ \hline * & \mathbf{L} \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{n\times n} \qquad$ donde

C (de orden m) es singular y **L** es triangular inferior e invertible, entonces existe $\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{P}$ (invertible) tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c||cccc} & 0 & & & & \\ \underset{m\times(m-1)}{*} & \vdots & & & & \\ & 0 & & & & \\ \hline & 0 & \beta_{m+1} & & & \\ & 0 & * & \beta_{m+2} & & \\ * & \vdots & * & * & \ddots & \\ & 0 & * & * & \cdots & \beta_n \end{array}\right]$$

$$\left(\cdots \underset{[(-\alpha_j)\boldsymbol{m+j}]}{\boldsymbol{\tau}} \cdots\right)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}\left(\cdots \underset{[(\alpha_j)\boldsymbol{j+m}]}{\boldsymbol{\tau}} \cdots\right); \qquad \boldsymbol{j} = m+1, \dots, n.$$

5 Un ejemplo muy sencillo

Ejemplo

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ con autovalores 0, 1 y 1.

$$\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{I}}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1+2}] \\ [(2)\mathbf{3+2}] \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{2+3}] \\ [(-1)\mathbf{2+1}]}]{} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)} \left[\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{S}}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{diagonal}}$$

6 Un ejemplo no tan sencillo

Ejemplo

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ con autovalores 1, 1 y 0.

$$\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & -9 \\ -1 & 2 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}] \\ [(-1)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}]{} \left[\begin{array}{ccc} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)}$$

$$\xrightarrow[1\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{ccc} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \left[\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{} \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[1\mathbf{I}]{(+)}$$

$$\xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}] \\ [(4)\mathbf{3}+\mathbf{1}]}} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ \hline 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(-4)\mathbf{1}+\mathbf{3}] \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ \hline 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)}$$

7 Toda matriz es semejante a otra matriz dentada

Para toda $\mathbf{A}$ existe $\mathbf{S}$ tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{C} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C}$, dentada, tiene los autovalores en la diagonal

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{dentada}}$$

Consecuencias

- $\sum \lambda_i = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$ y $\prod \lambda_i = \det \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}\mathbf{S}_{|j} = \mathbf{S}\mathbf{C}_{|j} \quad \Rightarrow \quad$ para j tal que $\mathbf{C}_{|j} = \lambda_i \mathbf{I}_{|j}$:

  $\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j}) = \lambda_i(\mathbf{S}_{|j}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{|j}$ es un autovector.

8 De vuelta al ejemplo sencillo y "desdentado"

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ con autovalores 0, 1 y 1.

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(-)} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [(1)\mathbf{1}+\mathbf{2}] \\ [(2)\mathbf{3}+\mathbf{2}] \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau} \\ [\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}] \\ [(-2)\mathbf{2}+\mathbf{3}] \\ [(-1)\mathbf{2}+\mathbf{1}]}]{} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[0\mathbf{I}]{(+)} \left[\begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{S} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{S}_{|j}) = \lambda_i(\mathbf{S}_{|j}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{|j}$ es un autovector.

9 Matrices diagonalizables

- La matriz es diagonalizable **si y solo si** las multiplicidades *algebraicas* son iguales a las *geométricas* para cada autovalor
- Si no hay autovalores repetidos tampoco hay "dientes"
- Cuando no hay autovalores repetidos $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es diagonalizable

$\boxed{10}$ Diagonalizando una matriz

- Encuentre el espectro: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$
- Encuentre la *multiplicidad algebraica* de cada autovalor: $\mu(\lambda_i)$

luego elija una de estas alternativas:

1. Dentar la matrix (implementado en NAcAL)
2. ...o para cada λ_i
   - encuentre el autoespacio

$$\mathcal{E}_{\lambda_i}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x} \right\} = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}).$$

   - revise $\mu(\lambda_i) = \dim \mathcal{E}_{\lambda_i}(\mathbf{A})$ (multiplicidades algebráica y geométrica iguales)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \left[\text{base de } \mathcal{E}_{\lambda_1}(\mathbf{A}) \# \cdots \# \text{base de } \mathcal{E}_{\lambda_k}(\mathbf{A})\right]$$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$$

$\boxed{11}$ Potencias de una matriz diagonalizable

Si $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ entonces $\mathbf{A}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\mathbf{A}\boldsymbol{x} =$

- ¿Qué relación hay entre los autovectores de $\mathbf{A}$ y los de $\mathbf{A}^2$?
- ¿Qué relación hay entre los autovalores de $\mathbf{A}$ y los de $\mathbf{A}^2$?

Dicho en forma matricial (si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$):

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{D}^2\mathbf{S}^{-1}$$

En general para, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0\ldots$ $\quad \mathbf{A}^n =$
¿y si $\mathbf{A}$ es invertible?

Problemas de la Lección 16

(L-16) Problema 1. Factorice las siguientes matrices en $\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$;

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 2. ¿Cuáles de las siguientes matrices no se pueden diagonalizar?

(a)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 3. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ encuentre $\mathbf{A}^{100}$ diagonalizando $\mathbf{A}$.
(Strang, 2007, ejercicio 7 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 4. Si los autovalores de $\underset{3\times 3}{\mathbf{A}}$ son 1, 1 y 2, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones sabemos que son ciertas?

(a) $\mathbf{A}$ es invertible.
(b) $\mathbf{A}$ es diagonalizable.
(c) $\mathbf{A}$ no es diagonalizable

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) Problema 5. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) (1^{pts}) Determine si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable. En caso de que lo sea, encuentre una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz $\mathbf{S}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.
(b) (0.5^{pts}) Calcule $\left(\mathbf{A}^6\right)\boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{v} = (0, \quad 0, \quad 0, \quad 1,)$.
(c) (0.5^{pts}) Use los valores obtenidos en el primer apartado para justificar que $\mathbf{A}$ es regular (invertible).

(d) (0.5^{pts}) ¿Qué relación hay entre los autovalores y los autovectores de **A** y los de $\mathbf{A}^{-1}$?

(L-16) PROBLEMA 6. Si $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$; entonces $\mathbf{A}^3 = (\quad)(\quad)(\quad)$ y $\mathbf{A}^{-1} = (\quad)(\quad)(\quad)$.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 7. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre los autovalores de **A**
(b) Encuentre los auto-vectores de **A**
(c) Diagonalice **A**: escríbalo como $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$.

(L-16) PROBLEMA 8. ¿Falso o verdadero? Si los autovalores de **A** son 2, 2 y 3 entonces sabemos que la matriz es
(a) Invertible
(b) Diagonalizable
(c) No diagonalizable.

(L-16) PROBLEMA 9. Sean las matrices

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 8 & \\ & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & \end{bmatrix}$$

(a) Complete dichas matrices de modo que en los tres casos $\det \mathbf{A}_i = 25$. Así, la traza es en todos los casos igual a 10, y por tanto para las tres matrices el único auto-valor $\lambda = 5$ está repetido dos veces ($\lambda^2 = 25$ y $\lambda + \lambda = 10$ implica $\lambda = 5$).
(b) Encuentre un vector característico con $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}$. Estas tres matrices no son diagonalizable porque no hay un segundo auto-vector linealmente independiente del primero.

(Strang, 2007, ejercicio 27 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 10. Factorice las siguientes matrices en $\mathbf{S}\ \mathbf{D}\ \mathbf{S}^{-1}$

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 1 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 11. Encuentre la matriz **A** cuyos autovalores son 1 y 4, cuyos autovectores son $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente.
(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 12. Si los elementos diagonales de una matriz triangular superior de orden 3×3 son 1, 2 y 7, ¿puede saber si la matriz es diagonalizable? ¿Quién es **D**?
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 5.2.)

(L-16) PROBLEMA 13.

(a) Encuentre los autovalores y auto-vectores de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(b) Explique por qué (o por qué no) la matriz **A** es diagonalizable.

(L-16) PROBLEMA 14. Sea **A** una matriz 3×3. Asuma que sus autovalores son 1 y 0, que una base de los autovectores asociados a $\lambda = 1$ son $[1, 0, 1]$ y $[0, 0, 1]$; mientras que los asociados a $\lambda = 0$ son paralelos a $[1, 1, 2]$.
(a) ¿Es **A** diagonalizable? En caso afirmativo escriba la matriz diagonal **D** y la matriz **S** tales que $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$.
(b) Encuentre **A**.

(L-16) PROBLEMA 15. Sea **A** una matriz 2×2 tal que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un autovector de **A** con autovalor 2, y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es otro autovector de **A** con autovalor -2. Si $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcule $\left(\mathbf{A}^3\right)\boldsymbol{v}$.

1 Esquema de la **Lección 17**

Esquema de la Lección 17

- Matrices simétricas $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal$
  - Autovalores y autovectores
- Introd. formas cuadráticas y matrices definidas positivas

2 Matrices simétricas $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

¿que hay de especial en $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ cuando $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ es simétrica?

1. Los autovalores son REALES
2. n autovectores *pueden elegirse* PERPENDICULARES

(¡siempre diagonalizable!)

Caso diagonalizable usual:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$$

Caso simétrico:
Puedo elegir autovectores orto*normales* (columnas de $\mathbf{S} = \mathbf{Q}$)

$$(\text{Si } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \qquad \text{Tma. espectral}$$

Diagonalizable *ortogonalmente*.

3 Autoespacios ortogonales en las matrices simétricas

Los autovectores (correspondientes a autovalores distintos) de una matriz simétrica son ortogonales.

Demostración.
Suponga $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \lambda_2\boldsymbol{y}$ (con $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Entonces

$$\lambda_1\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \mathbf{A}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{x}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{y} \;=\; (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\lambda_2.$$

Puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ necesariamente:

$$\lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) - \lambda_2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$$

□

4 Formas cuadráticas

Forma cuadrática:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}; \quad \text{con} \quad \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$$

Como $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}$ (con $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$), entonces

$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = (\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})$ (suma ponderada de cuadrados)

Forma cuadrática definida positiva:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0 \quad \forall\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \lambda_i > 0, \quad i = 1:n.$$

entonces también decimos que $\mathbf{A}$ es definida positiva.

5 Matrices definidas positivas

Significado:

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0 \qquad (\text{excepto para } \boldsymbol{x} = \mathbf{0})$$

Algunas propiedades

Suponga $\mathbf{A}$ simétrica definida positiva: ¿lo es también $\mathbf{A}^{-1}$?
$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}$

Suponga $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ simétricas definidas positivas: ¿lo es $\mathbf{A}+\mathbf{B}$?

por tanto la respuesta es. . .

6 Producto de matrices $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$

Supongamos $\underset{m\times n}{\mathbf{A}}$ rectangular. ¿Es $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ definida positiva?

$$\boldsymbol{x}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})\boldsymbol{x} =$$

Sólo puede ser 0 si $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ es $\mathbf{0}$

¿Cómo garantizar que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ cuando $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$?

7 Matrices simétricas: signo de los autovalores

¿Son todos los λ_i positivos? ¿Son todos negativos?

Calcular autovalores de $\underset{5\times 5}{\mathbf{A}}$ es imposible en general

Buenas noticias: Signo de los pivotes de la forma escalonada coincide con el de los λ_i
(si no hemos cambiado el signo del determinante con transformaciones *Tipo II*)

$$\text{núm. pivotes positivos} = \text{núm. autovalores positivos}$$

8 Matrices simétricas definidas positivas

- Todos los autovalores son:
- Todos los pivotes son:

$$\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$$

Pivotes:

¿Signo de los autovalores?

$$\lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0 \to \qquad \lambda = 4 \pm \sqrt{5} > 0$$

Resumen (para matrices simétricas):

1. Matrices simétricas tienen *autovalores reales* y *autovectores que se pueden elegir perpendiculares*
2. $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\intercal$ con $\mathbf{Q}$ ortogonal
3. $\mathbf{A}$ es simétricas si y solo si es *ortogonalmente* diagonalizable.
4. El signo de los autovalores coincide con el de los pivotes[1]

Problemas de la Lección 17

(L-17) PROBLEMA 1. Escriba las matrices **A**, **B** y **C** en la forma $\mathbf{QDQ}^\intercal$ del teorema espectral.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 11 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) PROBLEMA 2. Encuentre los autovalores y los autovectores unitarios (de longitud igual a uno) de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Strang, 2003, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.4.)

(L-17) PROBLEMA 3. Encuentre una matriz ortonornal **Q** que diagonalize la siguiente matriz simétrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

L-15 L-16 L-17 L-18 L-R

(Strang, 2003, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.4.)

(L-17) PROBLEMA 4. Suponga que **A** es una matriz simétrica de 3 por 3 con autovalores 0, 1 y 2.

(a) ¿Qué propiedades pueden garantizarse para los autovectores unitarios $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ correspondientes a los respectivos autovalores 0, 1 y 2?

(b) En términos de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, describa el espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, el espacio nulo por la izquierda $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\intercal)$, el espacio fila $\mathcal{C}(\mathbf{A}^\intercal)$ y el espacio columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

(c) Encuentre un vector $\boldsymbol{x}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. ¿Es único?

(d) ¿Qué condiciones debemos imponer sobre $\boldsymbol{b}$ para que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenga solución?

(e) Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son las columnas de **S**, y $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a $\boldsymbol{w}$; escriba las matrices $\mathbf{S}^{-1}$ y $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$.

(Strang, 2007, ejercicio 13 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) PROBLEMA 5. Escriba un hecho destacado sobre los valores característicos de cada uno de estos tipos de matrices:

(a) Una matriz simétrica real.

(b) Una matriz diagonalizable tal que $\mathbf{A}^n \to \mathbf{0}$ cuando $n \to \infty$.

(c) Una matriz no diagonalizable

(d) Una matriz singular

(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 5.5.)

L-15 L-16 L-17 L-18 L-R

(L-17) PROBLEMA 6. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre los valores característicos de **A** (recuerde que $i^2 = -1$).

(b) Encuentre los valores característicos de **B** (en este caso quizá le resulte más sencillo encontrar primero los autovectores, y deducir entonces los autovalores).

(c) De los siguientes tipos de matrices: ortogonales, invertibles, permutación, hermíticas, de rango 1. diagonalizables, de Markov ¿a qué tipos pertenece **A**?

(d) ¿y **B**?

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 5.5.)

(L-17) PROBLEMA 7. Si $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$ entonces los autovalores de **A** deben ser ________. De un ejemplo tal que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Ahora bien, si **A** es además simétrica, demuestre que entonces $\mathbf{A}^3$ es necesariamente $\mathbf{0}$.

L-15 L-16 L-17 L-18 L-R

(L-17) PROBLEMA 8. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre que **A** no es diagonalizable cuando $a = 3$.

(b) ¿Es **A** diagonalizable cuando $a = 2$? (explique su respuesta). En caso afirmativo calcule una matriz diagonal de autovalores **D** y una de autovectores **S** tales que $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$.

(c) ¿Es $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ diagonalizable para cualquier valor de a? ¿Es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$?

(d) Encuentre todos los valores de a para los cuales existe $\mathbf{A}^{-1}$ y además la matriz es diagonalizable.

(L-17) PROBLEMA 9. Sea la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(a) Exprese **B** en la forma $\mathbf{B} = \mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\intercal$ del teorema espectral.

(b) ¿Es **B** diagonalizable? Si no lo es, diga las razones; y en caso contrario genere una matriz **S** que diagonalice a **B**.

Esquema de la Lección 18

- Matrices (semi)definidas positivas, (semi)definidas negativas
- Completando el cuadrado
- Diagonalización por congruencia

- Definida positiva: $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0.$
- Semi-definida positiva: $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \geq 0.$
- Definida negativa: $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} < 0.$
- Semi-definida negativa: $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq 0.$
- Indefinida: ni semi-definida positiva ni semi-definida negativa.

Ejemplo

¿Qué número debo poner para que la matriz **A** sea singular?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \end{bmatrix}$$

- Autovalores:
- Menores principales:
- Para la forma cuadrática

$$q_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = (x, \quad y,) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + \quad y^2$$

¿Existe $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 0$?

Ejemplo

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ entonces $(x, \quad y,) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 12xy + \mathbf{?}\, y^2$

- ¿Hay números x y y que hagan $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ negativa?
- ¿Pasa por el origen?
- Si $y = 0$ y $x = 1$, ¿es positiva? (¿y si $x = -1$?)
- Si $x = 0$ y $y = 1$, ¿es positiva? (¿y si $y = -1$?)
- ¿Es siempre positiva?

$(0, 0,)$ **punto de silla**: mínimo en unas direcciones, y máximo en otras.

$$\lambda_1 = -2, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_1 = 11, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Si $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}$ entonces $(x,\quad y,)\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2x^2+12xy+20y^2$

Definida positiva.

Pruebas de que **A** es definida positiva

- ¿Son los menores principales positivos?
- ¿Son los autovalores positivos?

$$q_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}>0 \qquad \text{para todo } \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$$

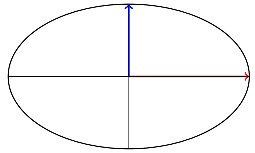
3 Completando el cuadrado

Si pudiéramos expresar $q(\boldsymbol{x})$ como suma de cuadrados, sabríamos si $q(\boldsymbol{x})$ es defnida positiva.

Completemos el cuadrado!

- $q(x,y)=2x^2+12xy+20y^2 \;=\; 2(x+\,?\,y)^2+\,?$
- $q(x,y)=2x^2+12xy+7y^2$
- $q(x,y)=2x^2+12xy+18y^2$
- $q(x,y)=2x^2+12xy+200y^2$ (gráfico)

Si definida positiva: $q(x,y)=a;\quad a>0$: elipse



¿es $q(x,y,z,w,t)=2t^2-2tx-2tz+w^2-2wy+2x^2-2xy+2y^2+z^2$ definida positiva? ☹☹☹☹☹!!!???

4 Matrices congruentes

A y **C** son congruentes si existe **B** *invertible* tal que $\boxed{\mathbf{C}=\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B}}$

Diagonalización por congruencia

Para toda **A** (simétrica) existe $\mathbf{B}=\mathbf{I}_{\tau_1\cdots\tau_k}$ (invertible) tal que

$$\mathbf{D}=\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{B} \qquad \text{es diagonal} \qquad (\mathbf{B}^{\intercal}={}_{\tau_k\cdots\tau_1}\mathbf{I})$$

Teorema Espectral: ¡Diagonalización por semejanza y congruencia!

$$\mathbf{D}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{Q}.$$

Toda forma cuadrática se puede expresar como suma de cuadrados

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{x}\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\intercal}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{y}\mathbf{D}\boldsymbol{y}; \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{y}=\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

5 Completar el cuadrado

$$2x^2+12xy+20y^2$$

$$\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{[(-3)1+2]}]{\boldsymbol{\tau}}\begin{bmatrix}2&0\\6&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\boldsymbol{\tau}\\ \boldsymbol{[(-3)1+2]}}]{}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix};$$

por tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\mathbf{D}=\mathbf{E}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&6\\6&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}$$

así $\mathbf{A}=(\mathbf{E}^{\intercal})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-1}$ y por tanto

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}=(x,\quad y,)\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{x}\,(\mathbf{E}^{-1})^{\intercal}\right)\mathbf{D}\left(\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{x}\right)$$

$$=\Big((x+3y),\quad y,\Big)\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}(x+3y)\\y\end{pmatrix}=2(x+3y)^2+2y^2$$

6 Ejemplo 3 por 3

$$¿\text{Es } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ definida positiva?}$$

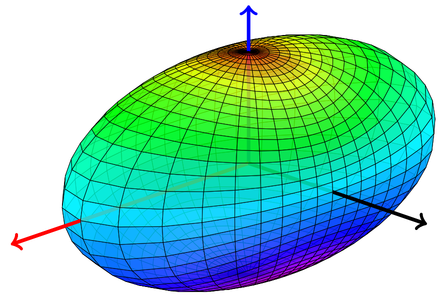
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\overset{\tau}{[(\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}]{\overset{\tau}{[(\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{2}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\overset{\tau}{[(\frac{2}{3})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}]{\overset{\tau}{[(\frac{2}{3})\mathbf{2}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz > 0$$

$\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = 1$: (elipsoide) Ejes en la dirección de los autovectores $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\intercal \boldsymbol{\lambda} \mathbf{Q}$

7 Matrices definidas positivas y elipsoides: ejemplo 3 por 3

- La región $(\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = a)$ es un (elipsoide).
- Los autovectores son los ejes principales $\mathbf{Q}$.
- Longitud de los ejes determinada por los autovalores



8 Otro ejemplo 3 por 3

$$¿\text{Es } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ definida positiva?}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[(1)\overset{\tau}{\mathbf{3}}+\mathbf{1}]}]{{[(1)\overset{\tau}{\mathbf{3}}+\mathbf{1}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\overset{\tau}{[(-\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{3}]}]{\overset{\tau}{[(-\frac{1}{2})\mathbf{1}+\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\overset{\tau}{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}]{\overset{\tau}{[\mathbf{2}\rightleftharpoons\mathbf{3}]}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz indefinida

9 "Clasificación" de formas cuadráticas

$$\boxed{\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \lesseqqgtr 0; \quad \text{para todo } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}}$$

Métodos

Mirar el signo de

1. Elem. diag.: $\mathbf{D} = \mathbf{B}^\intercal \mathbf{A} \mathbf{B}$ (Diagonalización por congruencia) ☺
2. Calcular los autovalores: (Raíces de un polinomio) ☹
3. Menores principales: (Critero de Sylvester) ☹

Ley de inercia

el número de componentes positivas, negativas y nulas de la diagonal de $\mathbf{D}$ es un invariante de $\mathbf{A}$, i.e., no depende de $\mathbf{B}$

(La diagonalización ortogonal $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^\intercal \mathbf{A} \mathbf{Q}$ es un caso especial)

Problemas de la Lección 18

(L-18) PROBLEMA 1. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, y escriba las formas cuadráticas $f = \boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ correspondientes:

(a) $\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & -8\end{bmatrix}$

(e) El determinante del apartado (b) es cero; ¿a lo largo de que recta se verifica que en todos sus puntos $f(x,y)=0$?

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 2. ¿Cuál es la forma cuadrática $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ para cada una de las siguientes matrices? Complete el cuadrado con la finalidad de escribir f como una suma de uno o dos cuadrados $d_1(\quad)^2 + d_2(\quad)^2$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 9\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 15 del conjunto de problemas 6.1.)

L-15 L-16 L-17 L-18 L-R

(L-18) PROBLEMA 3. ¿Cuales de la siguientes matrices tienen dos autovalores positivos? Pruebe $a > 0$ y $ac > b^2$ (determinante mayor que cero); no calcule los autovalores. $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} < 0$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}5 & 6\\6 & 7\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}-1 & -2\\-2 & -5\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}1 & 10\\10 & 100\end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1 & 10\\10 & 101\end{bmatrix}$

(Strang, 2007, ejercicio 14 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 4. Demuestre que $f(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$ no tiene un mínimo en $(0,0)$ a pesar de que todos sus coeficientes son positivos. Escriba $f(x,y)$ como una diferencia de cuadrados y encuentre un punto (x,y) donde $f(x,y)$ sea negativa.
(Strang, 2007, ejercicio 16 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 5. Demuestre a partir de los valores característicos que si $\mathbf{A}$ es definida positiva, entonces también lo son $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^{-1}$.
(Strang, 2007, ejercicio 4 del conjunto de problemas 6.2.)

L-15 L-16 L-17 L-18 L-R

(L-18) PROBLEMA 6. Sean las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} q_1(x,y,z) &= x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy.\\ q_2(x,y,z) &= -x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy - 2axz. \end{aligned}$$

(a) Demuestre que $q_1(x,y,z)$ es semi-definida positiva.
(b) Halle, si existiese, un valor de a de manera que $q_2(x,y,z)$ sea definida negativa.

(L-18) PROBLEMA 7. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas o no.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}^2$

(Strang, 2007, ejercicio 2 del conjunto de problemas 6.2.)

L-15 L-16 L-17 L-18 L-R

(L-18) PROBLEMA 8. Clasifique la forma cuadrática (ie., definida positiva, negativa, semidefinida, no definida, etc.)

$$q(x,y,z) = x^2 + 6xy + y^2 + az^2;$$

en función del parámetro a.

(L-18) PROBLEMA 9. Si $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}a & b\\b & d\end{smallmatrix}\right]$ es definida positiva, pruebe que $\mathbf{A}^{-1}$ es definida positiva.
(Strang, 2007, ejercicio 8 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 10. Si una matriz simétrica de 2 por 2 satisface $a > 0$, y $ac > b^2$, demuestre que sus autovalores son reales y positivos (definida positiva). Emplee la ecuación característica y el hecho de que el producto de los autovalores es igual al determinante.
(Strang, 2007, ejercicio 3 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 11. Decida si las siguientes matrices son definidas positivas, definidas negativas, semi-definidas, o indefinidas.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = -\mathbf{B}$

(d) $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}$

(L-18) PROBLEMA 12. Una matriz definida positiva no puede tener un cero (o incluso peor; un número negativo) en su diagonal principal. Demuestre que esta matriz no cumple $\boldsymbol{x}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$, para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{no es positiva cuando} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

(Strang, 2007, ejercicio 21 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-18) PROBLEMA 13. Demuestre que si **A** y **B** son definidas positivas entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ también es definida positiva. Para esta demostración los pivotes y los valores característicos no son convenientes. Es mejor emplear $\boldsymbol{x}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{x} > 0$
(Strang, 2007, ejercicio 5 del conjunto de problemas 6.2.)

(L-18) PROBLEMA 14. Factorice las siguientes matrices simétricas en la forma $\dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{L}}^{\intercal}$.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(L-18) PROBLEMA 15. La forma cuadrática $f(x, y) = 3(x + 2y)^2 + 4y^2$ es definida positiva. Encuentre la matriz **A**, factorícela en $\mathbf{LDL}^{\intercal}$, y relacione los elementos en **D** y **L** con 3, 2 y 4 en f.
(Strang, 2007, ejercicio 9 del conjunto de problemas 6.1.)

(L-18) PROBLEMA 16. Considere las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

(a) (0.5^{pts}) Calcule los autovalores de la matriz **A**.

(b) (0.5^{pts}) Prueba que si $a = 2$ la matriz **A** NO es diagonalizable.

(c) (1^{pts}) Para la matriz **B**, encuentre una matriz diagonal **D** y una matriz **P** tal que $\mathbf{B} = \mathbf{PDP}^{\intercal}$.

(d) (0.5^{pts}) Obtenga la expresión polinómica de la forma cuadrática asociada a la matriz **B** y pruebe que es definida positiva.

(L-18) PROBLEMA 17. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ b & 4/5 \end{pmatrix}$, calcule valores (si existen) de a y b para los cuales

(a) (0.5^{pts}) La matriz **A** es orto-normal.

(b) (0.5^{pts}) Las columnas de la matriz **A** son independientes.

(c) (0.5^{pts}) $\lambda = 0$ es un autovalor de **A**.

(d) (0.5^{pts}) **A** es simétrica y definida negativa.

(L-18) PROBLEMA 18.

(a) Obtenga la matriz **Q** asociada a la forma cuadrática $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + ay^2 + 8z^2$ y clasifique la matriz **Q** (es decir, diga en que casos la matriz es no definida, definida o semidefinida, de manera positiva o negativa) para el caso en el que a es igual a uno $(a = 1)$.

(b) Clasifíque la matriz **Q** cuando $a \neq 1$.

Problemas de la Lección opcional 2

(L-Opt-2) Problema 1. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (0.5^{pts}) Demuestre que **A** es invertible si y sólo si $a \neq 0$.
(b) (0.5^{pts}) ¿Es la matriz **A** definida positiva cuando $a = 1$? Justifique su respuesta.
(c) (1^{pts}) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $a = 2$.
(d) (0.5^{pts}) ¿Cuantas variables pueden ser tomadas como exógenas (o libres) en el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ cuando $a = 0$? ¿Cuales?

(L-Opt-2) Problema 2. Verdadero o falso (*puntuarán aquellas respuestas correctamente justificadas; una respuesta que se limite a indicar la falsedad o veracidad de cada afirmación tendrá una calificación de cero puntos*)

(a) Si **A** es simétrica, entonces $\mathbf{A}^2$ también lo es.
(b) Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})$ donde **I** es la matriz identidad.
(c) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada **A**, entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es compatible determinado.
(d) Si $\lambda = 0$ es un autovalor de la matriz cuadrada **A**, entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ puede ser incompatible.
(e) Si una matriz es ortogonal (columnas perpendiculares y de norma uno) entonces su inversa también es ortogonal.

(f) Si 1 es el único autovalor de una matriz **A** de orden 2×2, entonces **A** necesariamente tiene que ser la matriz identidad **I**.

(L-Opt-2) Problema 3. complete los blancos, o responda **V**erdadero/**F**also.

(a) Cualquier sistema generador de un espacio vectorial contiene una base del espacio (V/F)

____________________.

(b) Que los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sean linealmente independientes significa que

____

(c) El conjunto que sólo contiene el vector $\mathbf{0}$ es un conjunto linealmente independiente. (V/F)

____________________.

(d) Una matriz cuadrada de orden n por n es diagonalizable cuando:

____

(e) Si $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1, 1)$, entonces $||\boldsymbol{u}|| =$ ________________.
(f) Si $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1, 1)$ y $\boldsymbol{v} = (-2, 1, 0, 0)$, entonces $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} =$ ________________.

(L-Opt-2) Problema 4. En las preguntas siguientes **A** y **B** son matrices $n \times n$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (incluya una breve explicación, o un contra ejemplo que justifique su respuesta):

(a) Si **A** no es cero entonces $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
(b) Si $\det(\mathbf{AB}) \neq 0$ entonces **A** es invertible.
(c) Si intercambio las dos primeras filas de **A** sus autovalores cambian.
(d) Si **A** es real y simétrica, entonces sus autovalores son reales **(aquí no es necesaria una justificación)**.
(e) Si la forma reducida de echelon de $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})$ es la matriz identidad, entonces 5 no es un autovalor de **A**.
(f) Sea $\boldsymbol{b}$ un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Si el sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
(g) Sea **C** de orden 3×5. El rango de **C** puede ser 4.
(h) Sea **C** de orden $n \times m$, y $\boldsymbol{b}$ un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ no tiene solución, entonces $\operatorname{rg}(\mathbf{C}) < n$.
(i) Toda matriz diagonalizable es invertible.
(j) Si **A** es invertible, entonces su forma reducida de echelon es la matriz identidad.

(L-Opt-2) Problema 5. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de **B** son 0 y 2. Use esta información para responder a las siguientes cuestiones. Para cada matriz debe dar una explicación. Puede haber más de una matriz que cumpla la condición:

(a) ¿Qué matrices son invertibles?
(b) ¿Qué matrices tienen un autovalor repetido?
(c) ¿Qué matrices tienen rango menor a tres?
(d) ¿Qué matrices son diagonalizables?
(e) ¿Para qué matrices diagonalizables podemos encontrar tres autovectores ortogonales entre si?

(L-Opt-2) Problema 6. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule los autovalores y autovectores de **A**.
(b) ¿Es **A** diagonalizable?

(c) ¿Es posible encontrar una matriz **P** tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^\intercal$, siendo **D** una matriz diagonal?
(d) Calcule $|\mathbf{A}^{-1}|$.

(L-Opt-2) Problema 7. Sea **A** una matriz 3×3 y sean $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$ sus autovalores. Sean $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)^\intercal$ y $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 1)^\intercal$ los autovectores asociados a λ_1 y λ_2.

(a) ¿Es **A** diagonalizable?
(b) ¿Podría ser $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 0, -1)^\intercal$ un autovector asociado al autovalor $\lambda_3 = -1$.
(c) Calcule $\mathbf{A}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$.

(L-Opt-2) Problema 8.

(a) (0.5^{pts}) Encuentre un sistema lineal homogéneo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ cuyas soluciones sean

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \right\}$$

(b) (0.5^{pts}) Si el polinomio característico de la matriz **A** es $p(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 - 24\lambda^3 + 28\lambda^2 - 3\lambda + 10$, encuentre el rango de **A**.

(L-Opt-2) Problema 9. Suponga una matriz cuadrada e *invertible* $\underset{n \times n}{\mathbf{A}}$.

(a) ¿Cuáles son sus espacios columna $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ y espacio nulo $\mathcal{N}(\mathbf{A})$? (no responda con la definición, diga qué conjunto de vectores compone cada espacio).
(b) Suponga que **A** puede ser factorizada en $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 0 & u_{13} \end{bmatrix}$$

Describa el primer paso de eliminación en la reducción de **A** a **U**. ¿porqué sabe que **U** es también una matriz invertible? ¿Cuanto vale el determinante de **A**?
(c) Encuentre una matriz particular de dimensiones 3×3 e invertible **A** que no pueda ser factorizada en la forma **LU** (sin permutar previamente las filas). ¿Qué factorización es todavía posible en su ejemplo? (no es necesario que realice la factorización). ¿Cómo sabe que su matriz **A** es invertible?

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomsom Learning, Inc, Santa Fe, México, D. F., fourth ed. ISBN 970686609-4.