# Matemáticas II

Marcos Bujosa

Universidad Complutense de Madrid

04/04/2024





Puede encontrar la última versión de este material en

https://github.com/mbujosab/MatematicasII/tree/main/Esp







## 1 Esquema de la **Lección 19**

### Esquema de la Lección 19

- Media
- Desviación típica y varianza
- Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)





## 2 Una restrcción en estadística y probabilidad

La norma del vector constante "uno" es 1

Esto no se cumple con el producto punto de $\mathbb{R}^m$ $(m > 1)$

$$\|\mathbf{1}\|^2 = \langle \mathbf{1} | \mathbf{1} \rangle = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \sum_{i=1}^{m} 1 = m.$$

### Nuevo producto escalar en $\mathbb{R}^m$ para la estadística

$$\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle_s = \frac{1}{m}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$$

(de manera que: $\|\mathbf{1}\|^2 = \frac{1}{m}\Big(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}\Big) = 1$)

## 3 La media aritmética

La media aritmética $\mu_{\boldsymbol{y}}$ es el producto escalar de $\boldsymbol{y}$ con $\mathbf{1}$

$$\mu_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{m}\Big(\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{y}\Big), \qquad \text{es decir,} \quad \mu_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

La media aritmética $\mu_{\boldsymbol{y}}$ es el *valor* por el que multiplicar $\mathbf{1}$ para obtener la proyección ortogonal de $\boldsymbol{y}$ sobre $\mathcal{L}\big(\big[\mathbf{1};\big]\big)$

$\overline{\boldsymbol{y}}$: proyección de $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ sobre la recta $\mathcal{L}\big(\big[\mathbf{1};\big]\big)\subset\mathbb{R}^m$

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{1}\widehat{a}} \quad \text{y} \quad \boxed{(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}) \perp \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{m}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})\cdot\mathbf{1} = 0}$$

$$\frac{1}{m}(\boldsymbol{y}-\mathbf{1}\widehat{a})\cdot\mathbf{1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{m}\Big(\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{1}\Big) - \frac{1}{m}\Big(\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}\Big)\widehat{a} = 0;$$

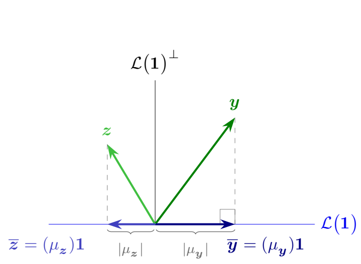
Por tanto

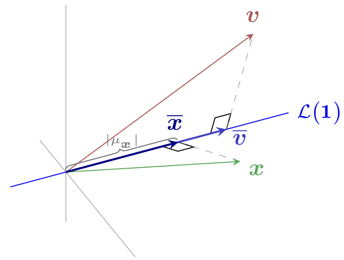
$$\widehat{a} = \frac{1}{m}\Big(\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{1}\Big) = \mu_{\boldsymbol{y}}$$





## 4 La media aritmética



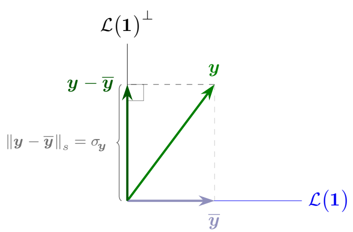



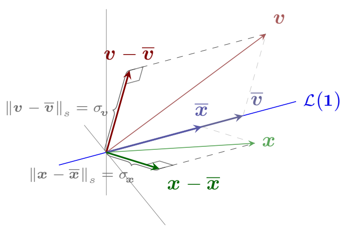





## 5 Desviación típica

$$\sigma_{\boldsymbol{y}} = \|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|.$$



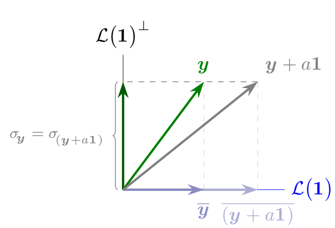



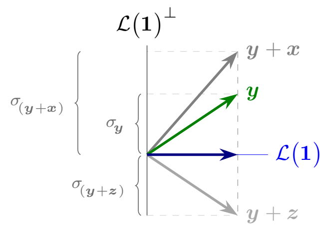





## 6 Vectores constantes y vectores de media nula

Sumar a $\boldsymbol{y}$ un vector constante $a\mathbf{1}$ no cambia la desviación típica.

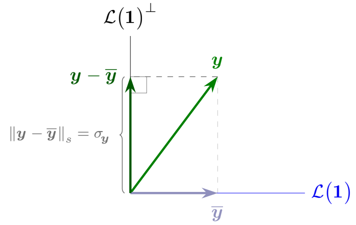



$$\sigma_{\boldsymbol{z}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{z} = a\mathbf{1}; \qquad \mu_{\boldsymbol{z}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{z}\perp\mathbf{1}$$

## 7 Varianza y el Teorema de Pitagoras

$$\sigma_{\boldsymbol{y}}^2 \;=\; \|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2 \;=\; \frac{1}{m}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})\cdot(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}) \;=\; \frac{1}{m}\sum_i (y_i-\mu_{\boldsymbol{y}})^2.$$



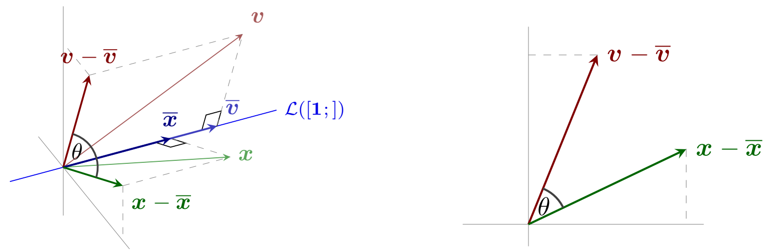

$$\sigma_{\boldsymbol{y}}^2 \;=\; \|\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\|^2 \;=\; \|\boldsymbol{y}\|^2-\|\overline{\boldsymbol{y}}\|^2 \;=\; \frac{1}{m}\Big(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}\Big)-\mu_{\boldsymbol{y}}^2, \;=\; \frac{\sum_i y_i^2}{m}-\mu_{\boldsymbol{y}}^2.$$





## 8 Covarianza y correlación

$$\sigma_{\boldsymbol{xy}} \;=\; \frac{1}{m}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})\cdot(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}});$$




$$\rho_{\boldsymbol{xy}} \;=\; \frac{\frac{1}{m}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})\cdot(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})}{\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu_x})\|\cdot\|(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})\|} \;=\; \frac{\sigma_{\boldsymbol{xy}}}{\sqrt{\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{y}}}} \;=\; \cos(\theta).$$





## 9 Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

Sea $\mathbf{X}$ tal que $\mathcal{L}\big([\mathbf{1};]\big)\subset\mathcal{C}\left(\mathbf{X}\right)$.

Denotamos con $\widehat{\boldsymbol{y}}$ la proyección ortogonal de $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ sobre $\mathcal{C}\left(\mathbf{X}\right)$

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{y}}=\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}} \quad \text{y} \quad \boxed{(\boldsymbol{y}-\widehat{\boldsymbol{y}})\;\perp\;\mathcal{C}\left(\mathbf{X}\right)\;\Rightarrow\;\tfrac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}(\boldsymbol{y}-\widehat{\boldsymbol{y}})=\mathbf{0}}$$

$$\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}(\boldsymbol{y}-\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{0} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{y}-\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0}.$$

Por tanto

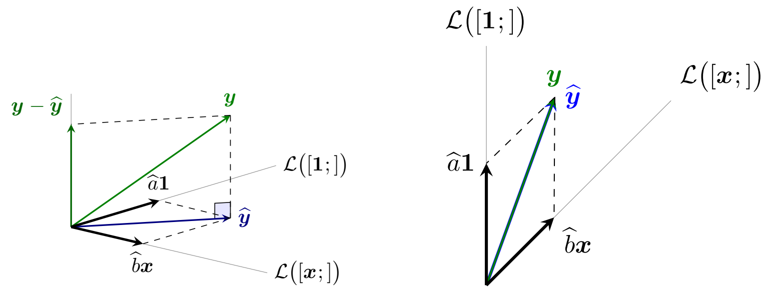
$$\left(\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\mathbf{X}\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{y}.$$





## 10 Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

Si $\mathbf{X}=\big[\mathbf{1};\,\boldsymbol{x};\big]$ es de rango 2.

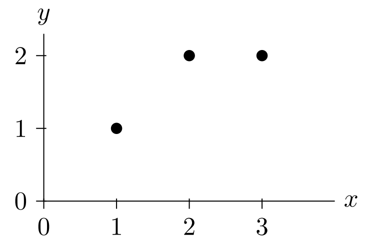



$$\left(\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\mathbf{X}\right)\begin{pmatrix}\widehat{a}\\ \widehat{b}\end{pmatrix}=\frac{1}{m}\mathbf{X}^{\intercal}\boldsymbol{y}.$$

## 11 Aplicación: Mínimos cuadrados (Ajuste lineal)

"buscando la mejor recta de ajuste $\widehat{y} = \widehat{a} + \widehat{b}x$"

Puntos $(x, y, )$: $(1, 1, )$; $(2, 2, )$; $(3, 2, )$




$$\begin{cases} a + 1b &= 1 \\ a + 2b &= 2 \\ a + 3b &= 2 \end{cases} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y} \text{ Sin solución})$$





## 12 Aplicación: Mínimos cuadrados (Ajuste lineal)

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y} \quad \text{(Sin solución)} \;\to\; \left(\frac{1}{m}\mathbf{X}^\intercal\mathbf{X}\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{m}\mathbf{X}^\intercal\boldsymbol{y} \quad \to \quad \widehat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

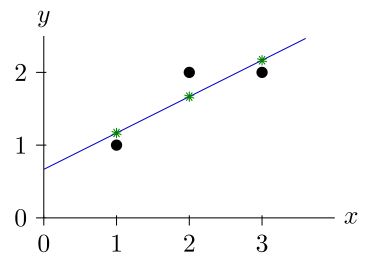
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \widehat{a} = \frac{2}{3}; \quad \widehat{b} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Mejor solución: } \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}x}$$





## 13 Aplicación: Mínimos cuadrados (Ajuste lineal)




$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} \longrightarrow \widehat{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 10/6 \\ 13/6 \end{pmatrix} \longrightarrow \widehat{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 2/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

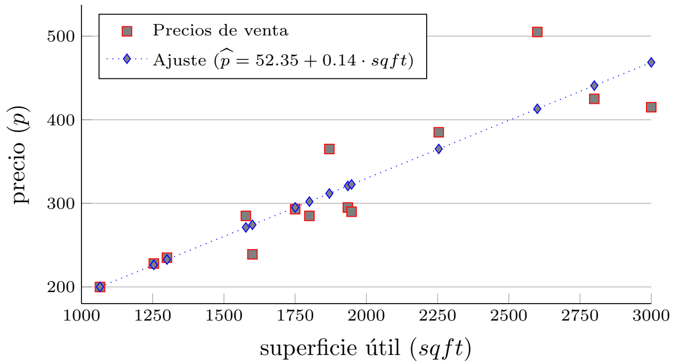
$$\boldsymbol{y} = \widehat{\boldsymbol{y}} + \widehat{\boldsymbol{e}} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \widehat{\boldsymbol{e}} \cdot \widehat{\boldsymbol{y}} &= 0 \\ \widehat{\boldsymbol{e}}\mathbf{X} &= \mathbf{0} \end{cases}.$$





## 14 Aplicación: ajustando por mínimos cuadrados

Precios de venta (miles de dólares) y superficie útil (pies al cuadrado) de 14 casas unifamiliares en la *University City* de la ciudad de San Diego en California en 1990 (Ramanathan, 2002, pp. 78)



## Problemas de la Lección 19

(L-19) PROBLEMA 1. Con las medidas $\boldsymbol{y} = (0, 8, 8, 20, )$ tomadas en los instantes $\boldsymbol{x} = (0, 1, 3, 4, )$,

(a) Plantee y resuelva las ecuaciones normales $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^\intercal\boldsymbol{y}$.
(b) Para el mejor ajuste lineal, encuentre los ajustes $p_i$ y los cuatro errores $e_i$.
(c) ¿Cuál es el cuadrado de la norma del vector de errores $\|\boldsymbol{e}\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$?
(d) Dibuje la recta de regresión
(e) Sustituya las medidas $\boldsymbol{y}$ por los valores ajustados $\boldsymbol{p} = (1, 5, 13, 17, )$ escriba las cuatro ecuaciones $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}$. Encuentre la solución exacta a $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}$
(f) Verifique que $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p} = (-1, 3, -5, 3, )$ es perpendicular a las dos columnas de $\mathbf{A}$.
(g) ¿Cuál es la distancia más corta $\|\boldsymbol{e}\|$ desde $\boldsymbol{y}$ al espacio columna de $\mathbf{A}$?

(Strang, 2003, ejercicio 1–3 del conjunto de problemas 4.3.)

(L-19) PROBLEMA 2.

(a) Escriba las tres ecuaciones $y = \alpha + \beta x$ dado el conjunto de datos: $y = 7$ para $x = -1$, $y = 7$ para $x = 1$, y $y = 21$ para $x = 2$. Encuentre la solución de mínimos cuadrados $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ y pinte el mejor ajuste lineal.
(b) Encuentre la proyección $\boldsymbol{p} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$. Es decir, tres valores del mejor ajuste lineal. Demuestre que el vector de error es $\boldsymbol{e} = (2, -6, 4, )$. ¿Por que es $\mathbf{P}\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$?





(L-19) PROBLEMA 3. Our measurements at times $t = 1, 2, 3$ are $b = 1, 4$, and $b_3$. We want to fit those points by the nearest line $C + Dt$, using least squares.

(a) Which value for $b_3$ will put the three measurements on a straight line? *Which line is it?* Will least squares choose that line if the third measurement is $b_3 = 9$? (Yes or no).
(b) What is the linear system $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ that would be solved exactly for $\boldsymbol{x} = (C, D)$ if the three points do lie on a line? Compute the projection matrix $\mathbf{P}$ onto the column space of $\mathbf{A}$.
(c) What is the rank of that projection matrix $\mathbf{P}$? How is the column space of $\mathbf{P}$ related to the column space of $\mathbf{A}$? (You can answer with or without the entries of $\mathbf{P}$ computed in (b).)
(d) Suppose $b_3 = 1$. Write down the equation for the best least squares solution $\widehat{\boldsymbol{x}}$, and show that the best straight line is horizontal.

Ramanathan, R. (2002). *Introductory Econometrics with applications*. South-Western, Mason, Ohio, fifth ed. ISBN 0-03-034186-8.

Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. USA, third ed. ISBN 0-9614088-9-8.