

Índice general

1	Qué haremos en la lección de hoy y por qué	2
2	Vectores como listas de números	3
3	Suma y producto por escalar	4
4	Combinación lineal	6
5	Producto escalar: $\langle x, y \rangle$	7
6	Norma de un vector: $\ x\ = \sqrt{\langle x, x \rangle}$	8
7	Hay más de una forma de medir	10
8	Recapitulación	12

Lección 2. El lenguaje geométrico del curso (parte I)

Marcos Bujosa

19 de septiembre de 2026

Resumen

Vectores en $\mathbb{R}^n$, producto escalar y norma

- ([slides](#)) — ([html](#)) — ([pdf](#))

1 Qué haremos en la lección de hoy y por qué

- Lección enteramente matemática: ni datos, ni regresión, ni econometría.
- Objetivo: fijar el lenguaje en el que se formulará todo el curso.
- Tres ideas a fijar:
 1. Vector = *lista ordenada* de números reales.
 2. Operaciones *componente a componente*.
 3. Producto escalar $\rightarrow$ norma $\rightarrow$ “longitud” del vector.
- Los dibujos serán esquemáticos, en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$; los cálculos valen en $\mathbb{R}^n$ para cualquier n .

Qué haremos en la lección de hoy y por qué

En la lección anterior quedó establecido que los datos económicos con los que vamos a trabajar pueden representarse como *listas ordenadas de n números reales*, es decir, como vectores de $\mathbb{R}^n$. Toda la econometría del curso consistirá en hacer operaciones con estos vectores y en interpretar geométricamente esas operaciones. Por eso, antes de seguir, necesitamos asentar el lenguaje en el que vamos a trabajar.

La lección de hoy es enteramente matemática. No veremos econometría, no veremos datos, no veremos regresión. Veremos vectores como *listas de números* y las operaciones que se hacen con ellos componente a componente. La recompensa de esta inversión inicial llegará pronto: a partir de la lección 4, las fórmulas de la estadística y de la regresión empezarán a aparecer como consecuencias naturales — casi inevitables — de la geometría que hoy introducimos.

Licencia: Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0).

Una advertencia sobre el método. A lo largo del curso recurriré con frecuencia a *dibujos*. Los dibujos serán esquemáticos y necesariamente en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, porque son los únicos espacios que podemos representar fielmente sobre un papel. Pero todo lo que hagamos con ellos seguirá siendo válido en $\mathbb{R}^n$ para cualquier n , simplemente porque las definiciones y fórmulas en $\mathbb{R}^n$ son las mismas que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. El dibujo es una ayuda para fijar la intuición; el cálculo es lo que sostiene el rigor.

2 Vectores como listas de números

Un *vector* de $\mathbb{R}^n$ es una lista ordenada de n números reales:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- Cada x_i es su *i-ésima componente*.
- Dos vectores son iguales si y solo si sus listas son idénticas.
- En los dibujos: flecha desde el origen al punto de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$.

Recuerde: El vector *es* la lista de números. La flecha es solo un modo de representar el vector como un punto en el espacio.

Vectores como listas

Un *vector* de $\mathbb{R}^n$ es una lista ordenada de n números reales. Lo escribiremos en **negrita**:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

donde cada x_i es un número real llamado *componente i-ésima* del vector. Dos vectores son iguales si y solo si tienen la misma dimensión y coinciden componente a componente.

Geométricamente, podemos pensar en $\mathbf{x}$ como un *punto del espacio* $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son precisamente $x_1, \dots, x_n$. En los dibujos lo señalaremos mediante una flecha que parte del origen de coordenadas y termina en ese punto. La flecha es una *convención visual* para identificar el punto, no una entidad con “módulo” y “dirección” preexistentes: el vector *es* la lista de números; la flecha es solo el modo cómodo de señalar el punto en su representación gráfica.

Esta visión es importante mantenerla. Quizá le hayan contado en bachillerato que un vector es un “segmento orientado con módulo, dirección y sentido”. Para nuestros propósitos, esa imagen es poco útil y a veces engañosa. Trabajaremos con vectores como *listas* de números sobre las que se hacen operaciones *componente a componente*, y la geometría aparecerá como una manera de visualizar esas operaciones, no como la definición de lo que el vector es.

El vector $\mathbf{y} = (1, 4, 2, 5, 7) \in \mathbb{R}^5$ es la lista $(1, 4, 2, 5, 7)$. No podemos dibujar $\mathbf{y}$ porque no tenemos cómo representar visualmente $\mathbb{R}^5$ (con sus cinco ejes perpendiculares de coordenadas), pero podemos operar con él *igual* que con $\mathbf{x}$.

Para profundizar:

- Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra* (5ª ed.), sección 1.1. Lectura amable.
- Vídeo: [Vectors, what even are they?](#) de 3Blue1Brown (capítulo 1 de *Essence of Linear Algebra*). Diez minutos.

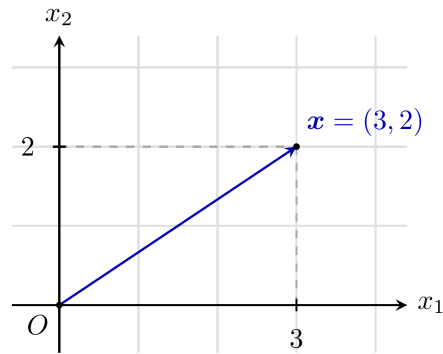


Figura 1: Ejemplo. El vector $\mathbf{x} = (3, 2) \in \mathbb{R}^2$ es la lista $(3, 2)$, que corresponde al punto del plano con primera coordenada 3 y segunda coordenada 2.

- Bujosa, M. *Curso de Álgebra Lineal*: [lista de reproducción](#). Vídeos introductorios sobre vectores y operaciones.

3 Suma y producto por escalar

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

- Solo se suman vectores con la *misma cantidad de componentes*.
- Propiedades: conmutativa, asociativa, neutro $\mathbf{0}$, opuesto $-\mathbf{x}$.
- Visualización en $\mathbb{R}^2$:
 - suma $\rightarrow$ regla del paralelogramo (truco visual);
 - producto por escalar $\rightarrow$ alargar/acortar/invertir la flecha.

Operaciones componente a componente: suma y producto por escalar

Sobre los vectores de $\mathbb{R}^n$ se definen dos operaciones básicas, ambas *componente a componente*. Son las únicas operaciones algebraicas que vamos a necesitar de momento.

- 3.1 Suma de vectores. Dados dos vectores con la *misma cantidad de componentes*, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, su suma es el vector cuyas componentes son las sumas de las componentes correspondientes:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

La suma solo está definida entre vectores con la misma cantidad de componentes: no tiene sentido sumar un vector de $\mathbb{R}^3$ con uno de $\mathbb{R}^5$.

La suma de vectores hereda las propiedades de la suma de números reales:

- Es *conmutativa*: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
- Es *asociativa*: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.
- Tiene *elemento neutro*, el vector cero $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.
- Cada vector $\mathbf{x}$ tiene un *opuesto* $-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Estas propiedades no las demostraremos: son consecuencia inmediata de las propiedades análogas para los números reales aplicadas componente a componente.

Visualmente, en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, la suma admite una representación cómoda mediante la *regla del paralelogramo*. Si dibujamos los dos vectores como flechas desde el origen y completamos el paralelogramo que tienen por lados, la diagonal desde el origen señala el punto correspondiente a $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Esta representación es un truco visual: la flecha del segundo vector se traslada hasta la cabeza del primero, vulnerando momentáneamente la regla de que las flechas parten del origen. Es un atajo cómodo, no la definición.

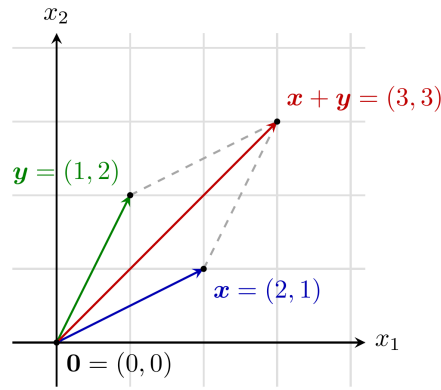


Figura 2: Ejemplo con $\mathbf{x} = (2, 1)$, $\mathbf{y} = (1, 2)$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (3, 3)$.

- 3.2 Producto de un vector por un escalar. Dado $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y un número real α (llamado *escalar*), su producto es el vector cuyas componentes son las de $\mathbf{x}$ multiplicadas por α :

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Si $\alpha > 1$, el vector resultante apunta al mismo punto en una dirección “más lejana” desde el origen; si $0 < \alpha < 1$, a un punto “más cercano”; si $\alpha = 0$, obtenemos el vector cero; si $\alpha < 0$, el vector resultante apunta en sentido contrario.

Las propiedades del producto por escalar son las habituales:

- Es *distributivo respecto de la suma de vectores*: $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}$.
- Es *distributivo respecto de la suma de escalares*: $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x}$.
- Es *asociativo*: $\alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$.
- Tiene *elemento neutro*, el número uno: $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

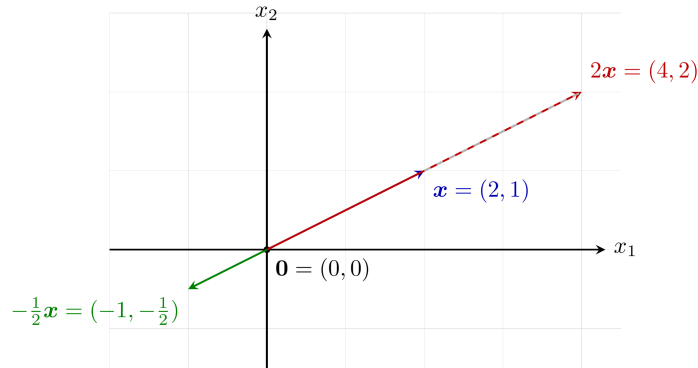


Figura 3: Ejemplo con $\mathbf{x} = (2, 1)$, $2\mathbf{x} = (4, 2)$, $-\frac{1}{2}\mathbf{x} = (-1, -\frac{1}{2})$.

De nuevo, son consecuencia directa de las propiedades análogas en $\mathbb{R}$.

4 Combinación lineal

Para vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ y escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

- Es el objeto central del curso.
- *Avance*: el ajuste por regresión será una combinación lineal de los regresores; los α_j serán los coeficientes estimados por MCO (mínimos cuadrados ordinarios).

Usaremos $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ para denotar el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales que se pueden formar con los k vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. En general, dicho conjunto es *infinito*.

Combinación lineal

Usaremos la notación $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ para designar el conjunto de *todas* las posibles combinaciones lineales que se pueden formar con los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

En general, este conjunto es *infinito* (hay infinitas elecciones posibles de los escalares). Por ejemplo, $\mathcal{L}(\mathbf{v})$, el conjunto de todos los múltiplos de un único vector $\mathbf{v}$, es geoméricamente una recta en $\mathbb{R}^n$ que pasa por el origen. En la lección 4 veremos que la media aritmética se obtiene proyectando sobre $\mathcal{L}(\mathbf{1})$, la recta de los vectores constantes.

Para profundizar:

- Strang, G. (2016), sección 1.1.
- Vídeo: [Linear combinations, span, and basis vectors](#) de 3Blue1Brown (capítulo 2). 12 minutos.

- Bujosa, M. *Curso de Álgebra Lineal*: vídeos sobre operaciones con vectores y combinaciones lineales en la [lista de reproducción](#).

5 Producto escalar: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (espacio euclídeo) el producto escalar usual es:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_e = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

- Entrada: *dos vectores, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$* . Salida: *un número real*.
- Propiedades:
 - Simetría: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.
 - Linealidad en cada argumento.
 - Definido positivo: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, con igualdad solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ejemplo: $\mathbf{x} = (3, -1, 2)$, $\mathbf{y} = (1, 2, \frac{1}{2}) \implies \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_e = 2$.

Producto escalar

Las operaciones que acabamos de ver — suma y producto por escalar — permiten *combinar* vectores, pero no nos dicen nada sobre *las relaciones geométricas* entre ellos: cuánto miden, qué ángulo forman, si son perpendiculares. Para abordar estas cuestiones necesitamos una operación nueva, el *producto escalar*.

El producto escalar usual¹, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_e$, de dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (también llamado *producto punto*, *producto interior* estándar o, en inglés, *dot product*) es el número real que se obtiene multiplicando sus componentes correspondientes y sumando todos los productos:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_e = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Atención a un punto importante de notación: aunque el símbolo “ $\cdot$ ” se parece al de la multiplicación de números, *el producto escalar de dos vectores es un número real, no un vector*. Toma como entrada dos listas de números y devuelve un único número. Por eso se llama “escalar” (de *escala*, número): el resultado vive en $\mathbb{R}$, no en $\mathbb{R}^n$. Un último aviso sobre el punto: lo nombro aquí, y solo aquí, porque es la notación que encontrará en la mayoría de los textos; pero la notación de trabajo de este curso será siempre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ con su subíndice. El motivo es que el subíndice recuerda *con qué convenio estamos midiendo*, y esa será la clave de todo el curso: la misma estructura geométrica reaparecerá en el espacio euclídeo usual (subíndice e), al operar como en estadística dividiendo por n (subíndice s) y, más adelante (lección 9), al trabajar con variables aleatorias.

- Propiedades El producto escalar tiene cuatro propiedades fundamentales, todas ellas demostrables aplicando componente a componente las propiedades de la suma y el producto por escalares en $\mathbb{R}$:

¹más adelante veremos que hay otros productos escalares; por ejemplo, en estadística se usa: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_s = \frac{1}{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_e$.

1. *Simetría*: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$. El orden no importa.
2. *Linealidad* en cada argumento: para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

Por simetría, lo mismo vale en el segundo argumento. Esta propiedad es la que permitirá, más adelante, manipular expresiones como $\langle (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \mathbf{x} \rangle$ y separarlas en sumandos manejables.

3. *Positivo*: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$. Es decir, el producto escalar de un vector consigo mismo es siempre no negativo. Por ejemplo, con el producto escalar usual $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_e = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$.
4. *Definido*: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Es decir, solo se anula para el vector cero.

Las propiedades tercera y cuarta nos permiten definir una *norma* a partir del producto escalar, como veremos en la sección siguiente.

- Ejemplo numérico Sean $\mathbf{x} = (3, -1, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ y $\mathbf{y} = (1, 2, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$. Su producto escalar usual es:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_e = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 3 - 2 + 0 - 4 = -3.$$

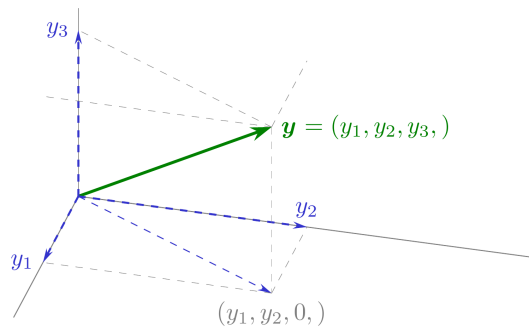
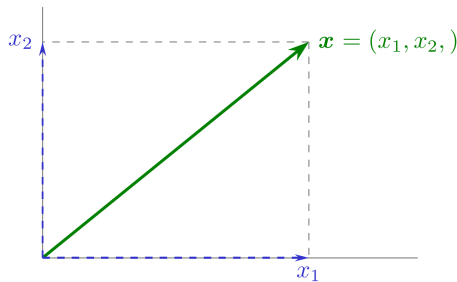
El número -3 no tiene, *por sí solo*, una interpretación geométrica inmediata. Su signo y magnitud cobrarán sentido en la próxima lección, cuando lo conectemos con el ángulo entre vectores. De momento basta con saber calcularlo.

Para profundizar:

- Strang, G. (2016), sección 1.2.
- Vídeo: [Dot products and duality](#) de 3Blue1Brown (capítulo 9). Catorce minutos, especialmente recomendable para entender por qué el producto escalar mide “proyección”.
- Bujosa, M. *Curso de Álgebra Lineal*: vídeos sobre el producto escalar en la [lista de reproducción](#).

6 Norma de un vector: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$

$$\|\mathbf{x}\|_e = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_e} = \sqrt{\sum x_i^2}.$$



En $\mathbb{R}^3$: Pitágoras dos veces (plano + altura) $\Rightarrow \|y\|_e^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

En $\mathbb{R}^n$: la misma expresión, por analogía. Ejemplo: $\|(1, -2, 2, 4)\|_e = \sqrt{25} = 5$.

Norma o longitud de un vector: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

*Definición a partir del producto escalar.*²

La *norma* (o *longitud*) de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se define como la raíz cuadrada del producto escalar de x consigo mismo:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

La raíz cuadrada está bien definida porque, por la propiedad de positividad, $\langle x, x \rangle \geq 0$.

En el caso particular del producto escalar usual tenemos:

$$\|x\|_e = \sqrt{\langle x, x \rangle_e} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

¿Por qué llamamos a esto “longitud”? La razón es el teorema de Pitágoras, que usted conoce tanto para $\mathbb{R}^2$ como para $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^2$ un vector $x = (x_1, x_2)$ corresponde al punto del plano cuyas coordenadas son (x_1, x_2) . Sus componentes son los catetos del triángulo rectángulo cuya hipotenusa va del origen a ese punto. Por Pitágoras:

$$\|x\|_e^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad \Rightarrow \quad \|x\|_e = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle_e}.$$

En $\mathbb{R}^3$ el vector $y = (y_1, y_2, y_3)$ se proyecta primero sobre el plano horizontal: esa proyección tiene longitud $\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. La proyección de y en el plano horizontal y la componente vertical y_3 forman un nuevo triángulo rectángulo cuya hipotenusa es y . Aplicando Pitágoras dos veces:

$$\|y\|_e^2 = \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right)^2 + y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \quad \Rightarrow \quad \|y\|_e = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \sqrt{\langle y, y \rangle_e}.$$

En $\mathbb{R}^n$ para $n > 3$ no podemos dibujar, pero *extendemos la definición por analogía*: la misma expresión $\sqrt{\langle x, x \rangle_e} = \sqrt{\sum x_i^2}$ vale en cualquier dimensión. Esta extensión no es arbitraria: es la única que preserva las propiedades de la longitud en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (positividad, escalado, desigualdad triangular).

Una nota sobre el rigor matemático seguido en esta segunda lección. En la lección 3, una vez introducida la *ortogonalidad*, demostraremos el teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$ sin necesidad de ningún dibujo. Aquí lo usamos como andamio intuitivo —dado por conocido en bajas dimensiones—; allí lo probaremos con plena generalidad.

²**Sobre la notación:** el título de la transparencia escribe la norma de forma genérica, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, para subrayar que la propia noción de norma no depende de qué producto escalar concreto se use, sino solo de sus propiedades abstractas (simetría, linealidad, positividad definida). El producto escalar euclídeo $\langle x, y \rangle_e$ que empleamos en esta lección es solo *un caso particular* —el más habitual— de esa noción general; por eso, en cuanto pasamos al cálculo explícito, escribimos $\|x\|_e = \sqrt{\langle x, x \rangle_e}$, con el subíndice e de “euclídeo”. Esta alternancia entre notación genérica (sin subíndice) y casos particulares (con subíndice) se mantendrá durante todo el curso: el subíndice s del producto escalar “estadístico” aparecerá ya en la próxima sección de esta misma lección, y se formalizará con todo detalle en la lección 4.

Propiedades de la norma

A partir de las propiedades del producto escalar se deducen las propiedades fundamentales de la norma:

1. *No negatividad*: $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, con igualdad si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *Homogeneidad*: $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Multiplicar un vector por un escalar multiplica su longitud por el valor absoluto del escalar.
3. *Desigualdad triangular*: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. La longitud de la suma no supera la suma de las longitudes. La demostraremos cuando dispongamos de la desigualdad de Cauchy–Schwarz, en la lección 3.

Ejemplo numérico

Para el vector $\mathbf{x} = (1, -2, 2, 4)$ y el producto escalar usual:

$$\|\mathbf{x}\|_e = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 4 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

La longitud de este vector de $\mathbb{R}^4$ es exactamente 5. No podemos visualizarla, pero podemos calcularla con la misma soltura que en $\mathbb{R}^2$.

Para profundizar:

- Strang, G. (2016), sección 1.2.
- Bujosa, M. *Curso de Álgebra Lineal*, capítulo 11, sección “Longitud de un vector en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ ”: [libro online](#).

7 Hay más de una forma de medir

¿Cómo medir la distancia entre dos ciudades? → ¿km en línea recta? ¿km carretera? ¿duración del viaje? ¿coste?...

En matemáticas:

- Productos escalares distintos dan medidas diferentes, pues: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$

En estadística: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_s = \frac{1}{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_e$:

- *Norma euclídea*: $\|\mathbf{x}\|_e = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_e} = \sqrt{\sum x_i^2}$ (la norma más habitual).
- *Norma “estadística”*: $\|\mathbf{x}\|_s = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_s} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2}$.

¿Por qué dos normas? Llamaremos $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ al vector cuyas n componentes son todas iguales a 1. Con la norma euclídea, $\|\mathbf{1}\|_e = \sqrt{n}$, *depende de n* . En estadística queremos que $\|\mathbf{1}\|_s = 1$ siempre.

- Volveremos sobre esto en la lección 4.

Hay más de una forma de medir

Conviene, ya en esta lección, plantar una idea que reaparecerá más adelante: *la longitud que acabamos de definir no es la única forma sensata de medir un vector.*

Para entenderlo, piense por un momento en cómo medimos *distancias* en la vida real. Entre dos puntos de una ciudad podemos hablar de:

- la distancia *en línea recta*, que un pájaro recorrería volando;
- la distancia *por carretera*, sumando los tramos de la ruta más corta;
- el *tiempo* necesario para ir andando, en coche o en transporte público;
- el *coste económico* del trayecto.

Todas son maneras legítimas de medir “cuán separados” están dos puntos, y cada una es apropiada para un propósito distinto. En $\mathbb{R}^n$ ocurre algo análogo: existen varias *normas*, todas con las mismas propiedades formales (no negatividad, homogeneidad, desigualdad triangular), y la elección depende de lo que se quiera enfatizar.

La norma que hemos definido — la *norma euclídea*, derivada del producto escalar usual — es la elección por defecto. Pero en estadística aparece de manera natural otra forma de medir, que difiere de la euclídea por un factor de $1/n$:

$$\|\mathbf{x}\|_s = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_s} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

La motivación es importante. Si tomamos el vector constante $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, su norma euclídea es $\sqrt{n}$, que *depende del tamaño de la muestra*. Esto es un inconveniente en estadística, donde queremos que magnitudes como la media o la varianza tengan un valor independiente de cuántas observaciones tengamos. Con la norma “estadística” anterior, el vector $\mathbf{1}$ tiene siempre norma 1, sea cual sea n .

No vamos a usar esta segunda norma de manera sistemática hasta la lección 4, cuando hagamos el puente entre la geometría y los conceptos estadísticos (media, varianza, covarianza). Pero conviene saber, desde ahora, que la dualidad existe. Explica, por ejemplo, una rareza que algún día le llamará la atención: en los textos de econometría, el coeficiente R^2 se escribe a veces como un cociente de *sumas de cuadrados* (SEC/STC) y otras veces como un cociente de *varianzas*. La equivalencia entre ambas formulaciones se debe precisamente a que las dos normas (la euclídea y la estadística) difieren solo en un factor multiplicativo que *se cancela al hacer el cociente*.

Quédese con la idea de fondo: *medir* no es algo único; es una elección que se hace en función del problema. La euclídea es la opción natural en geometría; la estadística, con su factor $1/n$, es la opción natural cuando los componentes del vector son observaciones que queremos resumir en promedio.

Para profundizar:

- Strang, G. (2016), sección 1.2, ejercicios sobre normas alternativas.

- Sobre normas en general, una introducción accesible: [artículo de Wikipedia](#) (en inglés; el equivalente en castellano es menos completo).

8 Recapitulación

Conceptos de espacio vectorial

Idea	Fórmula matemática / expresión algebraica
Vector	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
Suma	$(\mathbf{x} + \mathbf{y})_i = x_i + y_i$
Producto por escalar	$(\alpha \mathbf{x})_i = \alpha x_i$

Conceptos de espacio euclídeo

Idea	Fórmula matemática / expresión algebraica
Producto escalar usual	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_e = \sum x_i y_i$
Producto escalar en estadística	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_s = \frac{1}{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_e = \frac{1}{n} \sum x_i y_i$
Norma euclídea	$\ \mathbf{x}\ _e = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_e}$
Norma en estadística	$\ \mathbf{x}\ _s = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_s}$

Próxima lección: *ángulo* entre vectores, *ortogonalidad* y —con demostración— el teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$. Con esto quedará completo el lenguaje geométrico del curso.

Recapitulación

Lo que conviene retener de esta lección es modesto pero esencial:

1. Un *vector* de $\mathbb{R}^n$ es una lista ordenada de n números reales. Lo escribimos en **negrita** y lo identificamos geoméricamente con el punto del espacio cuyas coordenadas son los números de la lista.
2. Sobre vectores se opera *componente a componente*: la suma y el producto por escalar se definen sumando o multiplicando componente a componente. Una combinación lineal es la mezcla de ambas operaciones.
3. El *producto escalar* de dos vectores es el número que resulta de multiplicar componente a componente y luego sumar dichos productos. Es simétrico, lineal en cada argumento y no negativo cuando se aplica a un vector consigo mismo.
4. La *norma euclídea* de un vector es la raíz cuadrada del producto escalar del vector consigo mismo. Coincide en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con la longitud que da el teorema de Pitágoras —dado aquí por conocido— y la extiende, por la misma fórmula, a $\mathbb{R}^n$. En la lección 3 demostraremos ese teorema en $\mathbb{R}^n$ con rigor.
5. Existen *otras normas* además de la euclídea. En estadística usaremos una norma con un factor $1/n$ que hace que el vector constante **1** tenga siempre norma 1. Las dos normas son equivalentes para los cocientes (como el R^2), pero difieren en la magnitud de los valores.

En la próxima lección añadiremos a este aparato dos conceptos nuevos — el *ángulo* entre vectores y la *ortogonalidad* — y demostraremos el *teorema de Pitágoras* en $\mathbb{R}^n$. Con ellos quedará completo

el lenguaje geométrico que necesitamos para empezar a hablar de regresión.