

Sesión 25 (B) — Cobb–Douglas en Gretl: elasticidades y rendimientos a escala con `greene9_1`

Marcos Bujosa

Descripción de la práctica

La lección 15 (“Cobb–Douglas: elasticidades y rendimientos a escala”) presentó la función de producción $Q = AL^\alpha K^\gamma e^U$ con los datos de Zellner y Revankar, que Gretl incluye como `greene9_1` en la pestaña **Greene** de los ficheros de muestra: el valor añadido (`valadd`), el capital (`capital`) y el trabajo (`labor`) de la industria del equipo de transporte en 25 estados de Estados Unidos en 1957. Esta práctica reproduce en Gretl las cifras de la lección: el modelo log-log, la lectura de las elasticidades parciales, el contraste de rendimientos constantes a escala con `restrict` y el modelo restringido construido por sustitución, como en la lección 13.

Objetivos

1. Estimar la función de producción en logaritmos y leer $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ como elasticidades parciales.
2. Contrastar $H_0: \alpha + \gamma = 1$ con `restrict` y con el intervalo de confianza de la suma.
3. Construir el modelo restringido por sustitución, la regresión del producto por trabajador sobre el capital por trabajador, y reproducir el F con las dos sumas de cuadrados.
4. Leer el resultado con la cautela de un contraste con 25 observaciones.

Comandos nuevos de esta práctica. Uno solo:

`logs` crea el logaritmo de cada serie de la lista y lo guarda con el prefijo `l_` (`logs valadd` crea `l_valadd`); en la ventana principal, con las series marcadas, **Añadir ->Logaritmos de las variables seleccionadas**.

Los demás ya se han usado: `open` (sesión 4), `summary --simple` y `printf` (sesión 7), `series` (sesión 7), la función `corr`, como el comando `corr` de la sesión 7, la matriz `$vcv` de varianzas y covarianzas de los coeficientes ([actividad 6 \(html\)](#) de la práctica A de la sesión 20), que allí se leía por posición (`$vcv[3,4]`) y aquí por los nombres de los regresores (`$vcv(a,b)` es la covarianza estimada entre los coeficientes de `a` y `b`, y `$vcv(a,a)` la varianza estimada del coeficiente de `a`, el cuadrado de su error estándar), `ols` y sus accesorios (sesiones 11 a 18), `restrict` y `$test` ([actividad 2 \(html\)](#) de la práctica A de la sesión 20) y la función `critical` (sesión 18).

Actividad 1 - La función de producción en logaritmos

Abra `greene9_1` (**Archivo ->Abrir datos ->Archivo de muestra**, pestaña **Greene**), cree los logaritmos de las tres variables y estime el modelo log-log del valor añadido sobre el trabajo y el capital.

`open` carga el fichero y `summary --simple` da los estadísticos principales de las tres series. `logs` crea `l_valadd`, `l_capital` y `l_labor`. El modelo se estima con `ols`; el `printf` imprime $e^{\hat{\beta}_1}$, la estimación del factor de escala A , y la correlación entre los logaritmos de los dos factores.

o bien teclee en línea de comandos:

Licencia: Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0).

```
open greene9_1 --quiet
```

```
summary valadd capital labor --simple
logs valadd capital labor
ols l_valadd const l_labor l_capital
printf "Factor de escala A = e^const = %.2f ; correlacion entre l_labor y l_capital: %.3f\n", exp($coeff(const)),
↪ corr(l_labor, l_capital)
```

	Media	Mediana	D. T.	Mín	Máx
valadd	711,6	494,5	966,1	22,70	4080
capital	53,06	22,00	93,02	1,543	435,1
labor	105,6	83,03	126,0	4,063	490,4

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1-25
Variable dependiente: l_valadd

	coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	1,84442	0,233593	7,896	7,33e-08 ***
l_labor	0,805183	0,126334	6,373	2,06e-06 ***
l_capital	0,245428	0,106857	2,297	0,0315 **

Media de la vble. dep.	5,812092	D.T. de la vble. dep.	1,375304
Suma de cuad. residuos	1,222260	D.T. de la regresión	0,235706
R-cuadrado	0,973075	R-cuadrado corregido	0,970627
F(2, 22)	397,5427	Valor p (de F)	5,39e-18
Log-verosimilitud	2,253715	Criterio de Akaike	1,492570
Criterio de Schwarz	5,149198	Crit. de Hannan-Quinn	2,506763

Factor de escala A = e^const = 6,32 ; correlacion entre l_labor y l_capital: 0,952

Lo que debe observar

El modelo estimado es el de la lección 15: $\hat{\alpha} = 0,805$ con error estándar 0,126 y $\hat{\gamma} = 0,245$ con error estándar 0,107, $R^2 = 0,973$ y $s = 0,236$. Es un modelo log-log y sus coeficientes son elasticidades: si el trabajo varía en la fracción p con el capital fijo, el valor añadido varía en la fracción $0,805p$; si varía el capital con el trabajo fijo, en la fracción $0,245p$. El t del trabajo es 6,37: datos como estos serían muy raros si la elasticidad del trabajo fuese cero. El del capital es 2,30 con valor p 0,03: datos como estos serían raros si la elasticidad del capital fuese cero, pero no mucho, y al 1 % no se rechazaría.

La precisión es escasa porque los dos regresores están muy correlados: la correlación entre **l_labor** y **l_capital** es 0,952, los estados con más trabajo tienen más capital, y la parte propia de cada regresor es corta (lección 14). La constante, 1,844, es el logaritmo del factor de escala, $A = e^{1,844} = 6,3$: no es un valor ajustado que se lea como cantidad económica, porque el punto en que los dos logaritmos valen cero, un estado con una unidad de trabajo y una de capital, queda fuera de los datos (**labor** va de 4,1 a 490 y **capital** de 1,5 a 435).

Actividad 2 - ¿Rendimientos constantes a escala?

Contraste $H_0: \alpha + \gamma = 1$: si los dos factores aumentan en la misma fracción p , el valor añadido aumenta en la fracción $(\alpha + \gamma)p$, y la suma vale 1 cuando los rendimientos son constantes.

La suma estimada es $\hat{\alpha} + \hat{\gamma}$ y su varianza estimada es la suma de las dos varianzas más dos veces la covarianza, que **\$vcv** proporciona (la lección 16, en “Varias categorías: una indicadora menos que grupos”, hizo la cuenta análoga para la diferencia de dos coeficientes, con los cuatro grupos de **wage1**); con su raíz, el error estándar de la suma, el primer **printf** imprime el intervalo al 95 % para $\alpha + \gamma$, con el valor crítico de

la t con $n - k = 22$ grados de libertad que da **critical**. Después, **restrict** impone la restricción $\alpha + \gamma = 1$ (en la ventana del modelo, **Contrastes ->Restricciones lineales**) y **\$test** y **\$pvalue** recogen el F y su valor p ; el último **printf** añade el valor crítico de la $F(1, 22)$ al 5 %.

```

scalar suma = $coeff(l_labor) + $coeff(l_capital)
scalar eeSuma = sqrt($vcv(l_labor, l_labor) + $vcv(l_capital, l_capital) + 2*$vcv(l_labor, l_capital))
scalar tc = critical(t, $df, 0.025)
printf "alpha + gamma = %.3f ; error estandar %.3f ; t frente a 1: %.2f ; intervalo al 95%: [%.3f, %.3f]\n", suma, eeSuma,
↪ (suma - 1)/eeSuma, suma - tc*eeSuma, suma + tc*eeSuma
restrict --quiet
    b[l_labor] + b[l_capital] = 1
end restrict
printf "F(1,%d) = %.2f    valor p = %.3f    valor critico al 5%: %.2f\n", $df, $test, $pvalue, critical(F, 1, $df, 0.05)

```

```
alpha + gamma = 1,051 ; error estandar 0,041 ; t frente a 1: 1,24 ; intervalo al 95%: [0,966, 1,135]
```

Restricción:

```
b[l_labor] + b[l_capital] = 1
```

Estadístico de contraste: $F(1, 22) = 1,54069$, con valor $p = 0,227587$

$F(1,22) = 1,54$ valor $p = 0,228$ valor critico al 5%: 4,30

Lo que debe observar

La suma estimada es 1,051 con error estándar 0,041. El estadístico $F(1, 22)$ vale 1,54, frente a un valor crítico de 4,30 al 5 %, y el valor p es 0,23: datos como estos no serían raros si los rendimientos fuesen constantes, y el contraste al 5 % no rechaza H_0 . Con una restricción, el F es el cuadrado del t de la suma frente a 1: $(1,051 - 1)/0,041 = 1,24$, y $1,24^2 = 1,54$, como en la lección 13.

El intervalo al 95 % para $\alpha + \gamma$ va de 0,966 a 1,135: es el conjunto de valores de la suma que el contraste no rechaza al 5 %. Contiene al 1, pero también rendimientos algo decrecientes y bastante crecientes. “No se rechaza” no es “los rendimientos son constantes”.

Actividad 3 - El modelo restringido por sustitución

Imponga la restricción como en la lección 13: con $\gamma = 1 - \alpha$, el modelo se escribe $\log Q - \log L = \beta_1 + \gamma(\log K - \log L) + U$, la regresión del logaritmo del producto por trabajador sobre el logaritmo del capital por trabajador. Estímela y reconstruya el F con las dos sumas de cuadrados.

Las dos **series** crean el producto por trabajador y el capital por trabajador, en logaritmos. El **ols** estima el modelo restringido; su coeficiente es $\hat{\gamma}$ restringido y 1 menos ese coeficiente es $\hat{\alpha}$ restringido. Antes se guarda en **SRC** la suma de cuadrados de los residuos del modelo sin restringir y en **s2** su cuasivarianza, s^2 ; el **printf** imprime las dos sumas de cuadrados y el cociente $(SRC_r - SRC)/s^2$, que con una restricción es el F de la lección 13.

```

ols l_valadd const l_labor l_capital --quiet
scalar SRC = $ess
scalar s2 = $sigma^2
series lqpl = l_valadd - l_labor
series lkpl = l_capital - l_labor
ols lqpl const lkpl
printf "Restringido: gamma = %.3f (ee %.3f), alpha = 1 - gamma = %.3f\n", $coeff(lkpl), $stderr(lkpl), 1 - $coeff(lkpl)
printf "SRC sin restringir %.3f ; SRC restringido %.3f ; (SRC_r - SRC)/s2 = %.2f\n", SRC, $ess, ($ess - SRC)/s2

```

Modelo 2: MCO, usando las observaciones 1-25

Variable dependiente: lqpl

coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p

const	2,09497	0,118932	17,61	7,55e-15 ***
lkpl	0,289251	0,102035	2,835	0,0094 ***

Media de la vble. dep.	1,786111	D.T. de la vble. dep.	0,271172
Suma de cuad. residuos	1,307857	D.T. de la regresión	0,238460
R-cuadrado	0,258930	R-cuadrado corregido	0,226709
F(1, 23)	8,036194	Valor p (de F)	0,009387
Log-verosimilitud	1,407614	Criterio de Akaike	1,184771
Criterio de Schwarz	3,622523	Crit. de Hannan-Quinn	1,860900

Restringido: gamma = 0,289 (ee 0,102), alpha = 1 - gamma = 0,711
SRC sin restringir 1,222 ; SRC restringido 1,308 ; (SRC_r - SRC)/s2 = 1,54

Lo que debe observar

El coeficiente del capital por trabajador es 0,289 con error estándar 0,102: las estimaciones restringidas son $\hat{\gamma} = 0,289$ y $\hat{\alpha} = 0,711$. Al imponer rendimientos constantes, el reparto entre trabajo y capital se desplaza hacia el capital respecto de la estimación libre (0,805 y 0,245). La suma de cuadrados de los residuos sube de 1,222 a 1,308, y esa diferencia dividida por s^2 es 1,54, el F de la Actividad 2: la restricción aumenta la longitud al cuadrado del residuo en una cantidad del orden de lo que cabe esperar por una dimensión si H_0 fuese cierta.

El R^2 del modelo restringido, 0,259, no se compara con el 0,973 del modelo sin restringir: los regresandos son distintos, `l_valadd` frente al logaritmo del producto por trabajador, y el segundo tiene mucha menos variación total que explicar. Lo comparable son las sumas de cuadrados de los residuos: el residuo del modelo restringido, $\log Q - \log L - \hat{\beta}_1 - \hat{\gamma}(\log K - \log L)$, es igual a $\log Q - \hat{\beta}_1 - (1 - \hat{\gamma})\log L - \hat{\gamma}\log K$, un residuo de `l_valadd` con la restricción impuesta, y se compara con el del modelo libre.

Actividad 4 - Lo que el contraste no dice

Sin código. Dos cautelas de la lección 15 antes de informar el resultado.

La primera es la potencia: con 25 observaciones, un contraste rechaza una hipótesis falsa por poco en una fracción pequeña de las muestras. La [actividad 3 \(html\)](#) de la práctica C de la sesión 18 lo midió repitiendo el experimento: con doce observaciones, una hipótesis falsa por poco se rechazaba menos de una de cada tres veces. El intervalo de la Actividad 2, de 0,966 a 1,135, dice lo mismo con los datos de aquí: el contraste deja sin descartar rendimientos a escala entre un 3 % decrecientes y un 13 % crecientes.

La segunda es la lectura de γ . Los datos son de sección cruzada, 25 estados en un mismo año: $\hat{\gamma}$ describe cómo varía el valor añadido entre estados con distinto capital y el mismo trabajo. Leerlo como el efecto de aumentar el capital en una industria dada exige el supuesto de exogeneidad de la lección 9, $E[U | \mathbf{X}] = 0$: que lo que la función no recoge, la tecnología, la cualificación del trabajo o la composición de la industria en cada estado, sea ortogonal a las funciones del trabajo y del capital.

Preguntas de interpretación para la clase

1. $\hat{\alpha} = 0,805$ y $\hat{\gamma} = 0,245$. ¿Qué mide cada uno, con qué fijo, y qué mide su suma?
2. El t del capital es 2,30 y su valor p 0,03. ¿Qué se concluye al 5 % y qué al 1 %? ¿Por qué es tan baja la precisión con un R^2 de 0,973?
3. El F del contraste de rendimientos constantes es 1,54 y el t de la suma frente a 1 es 1,24. ¿Qué relación hay entre los dos números y por qué?
4. Al imponer $\alpha + \gamma = 1$, $\hat{\gamma}$ pasa de 0,245 a 0,289 y $\hat{\alpha}$ de 0,805 a 0,711. ¿Por qué cambian los dos y por qué el ajuste empeora poco?
5. El intervalo para $\alpha + \gamma$ va de 0,966 a 1,135. ¿Es correcto informar que “la industria tiene rendimientos constantes a escala”? ¿Qué se puede informar?

Para profundizar

- Zellner, A. y Revankar, N. S. (1969), “Generalized production functions”, *Review of Economic Studies* 36, 241–250: el origen de los datos.
- Greene, W. H. (2018), *Econometric Analysis*, 8.^a ed., Pearson: el fichero **greene9_1** de Gretl reproduce su ejemplo de Cobb–Douglas con el contraste de rendimientos constantes.
- Wooldridge, J. M. (2020), *Introductory Econometrics*, cap. 4, sección 4.4 (contraste de una combinación lineal de parámetros) y cap. 6, sección 6.2 (modelos con logaritmos).

Código completo de la práctica

```
# -----
# Copyright (C) 2026 Marcos Bujosa
# Licencia: GNU General Public License v3.0 o posterior
# Este código es software libre y puede ser redistribuido y/o modificado bajo los términos de la GPL.
# Ver el archivo LICENSE del repositorio para más detalles.
# -----

# Los dos primeros comandos son necesarios para que Gretl guarde los resultados de la práctica en el
↳ directorio de trabajo
# al ejecutar lo siguiente desde un terminal (use los nombres y ruta que correspondan)
#
#   DIRECTORIO="Nombre_Directorio_trabajo" gretlcli -b ruta/nombre_fichero_de_la_practica.inp
#
# Si esto no le funciona en su sistema, comente las siguientes dos líneas y sitúese en el directorio de
↳ trabajo de gretl
# que corresponda (configure dicho directorio de trabajo desde la ventana principal de Gretl).

string directory = getenv("DIRECTORIO")
set workdir "@directory"

set verbose off

open greene9_1 --quiet
outfile --quiet modeloLogLog.txt
    summary valadd capital labor --simple
    logs valadd capital labor
    ols l_valadd const l_labor l_capital
    printf "Factor de escala A = e^const = %.2f ; correlacion entre l_labor y l_capital: %.3f\n",
↳ exp($coeff(const)), corr(l_labor, l_capital)
end outfile

outfile --quiet restricción.txt
    scalar suma = $coeff(l_labor) + $coeff(l_capital)
    scalar eeSuma = sqrt($vcv(l_labor, l_labor) + $vcv(l_capital, l_capital) + 2*$vcv(l_labor, l_capital))
    scalar tc = critical(t, $df, 0.025)
    printf "alpha + gamma = %.3f ; error estandar %.3f ; t frente a 1: %.2f ; intervalo al 95%: [%.3f,
↳ %.3f]\n", suma, eeSuma, (suma - 1)/eeSuma, suma - tc*eeSuma, suma + tc*eeSuma
    restrict --quiet
        b[l_labor] + b[l_capital] = 1
    end restrict
    printf "F(1,%d) = %.2f   valor p = %.3f   valor critico al 5%: %.2f\n", $df, $test, $pvalue,
↳ critical(F, 1, $df, 0.05)
end outfile

outfile --quiet restringido.txt
    ols l_valadd const l_labor l_capital --quiet
    scalar SRC = $ess
    scalar s2 = $sigma^2
    series lqpl = l_valadd - l_labor
    series lkpl = l_capital - l_labor
    ols lqpl const lkpl
    printf "Restringido: gamma = %.3f (ee %.3f), alpha = 1 - gamma = %.3f\n", $coeff(lkpl), $stderr(lkpl),
↳ 1 - $coeff(lkpl)
    printf "SRC sin restringir %.3f ; SRC restringido %.3f ; (SRC_r - SRC)/s2 = %.2f\n", SRC, $ess, ($ess -
↳ SRC)/s2
end outfile
```

Respuestas

1. $\hat{\alpha}$ es la elasticidad del valor añadido respecto del trabajo con el capital fijo: si el trabajo varía en la fracción p , el valor añadido varía en la fracción $0,805 p$. $\hat{\gamma}$ es la elasticidad respecto del capital con el trabajo fijo. La suma mide los rendimientos a escala: si los dos factores varían en la misma fracción p , el valor añadido varía en la fracción $1,051 p$.
2. Al 5 % se rechaza que la elasticidad del capital sea cero, porque el valor p es menor que 0,05; al 1 % no se rechaza. La precisión es baja aunque el ajuste sea alto porque la precisión de cada coeficiente depende de la parte propia de su regresor, no del ajuste conjunto: `l_labor` y `l_capital` tienen correlación 0,952, y la parte de cada uno que el otro no comparte es corta, como en la lección 14.
3. $1,24^2 = 1,54$. Con una sola restricción, el contraste F y el contraste t de la combinación $\alpha + \gamma$ frente a 1 son el mismo contraste, como se vio en la lección 13: el F con $q = 1$ es el cuadrado del t .
4. La restricción obliga a que la suma valga 1, y la estimación libre daba 1,051: hay que repartir una reducción de 0,051. Como los dos regresores están muy correlados, el ajuste distingue mal cuánto corresponde a cada uno, y la restricción mueve los dos coeficientes a la vez, el del capital hacia arriba y el del trabajo hacia abajo, con un coste pequeño en la suma de cuadrados (1,222 a 1,308): la restricción se impone en una dirección en la que los datos apenas distinguen.
5. No. El contraste no rechaza rendimientos constantes, pero tampoco rechaza ningún valor de la suma entre 0,966 y 1,135. Se puede informar que, a la luz del contraste, datos como estos no serían raros con rendimientos constantes, y que con 25 observaciones el intervalo deja sin descartar rendimientos entre un 3 % decrecientes y un 13 % crecientes.